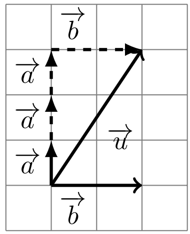
# Vecteurs
# Corrigé



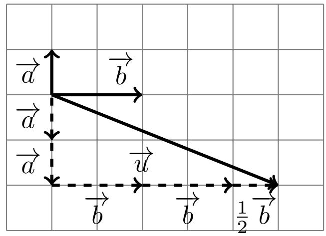
**Exercice 1** (Repérage)**.** Exprimer les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ (en d'autres termes : compléter les pointillés : $\overrightarrow{u} = \ldots \times \overrightarrow{a} + \ldots \times \overrightarrow{b}$ ; de même pour $\overrightarrow{v}$).

(a)




$\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

(b)




$\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{a} + 2,5\overrightarrow{b}$

**Exercice 2** (Parallélogramme)**.** *Dans un repère, on considère trois points $A\,(0;2)$, $B\,(4;-2)$ et $C\,(-1;1)$. Déterminer les coordonnées du point $D$ telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.*

On peut tracer les trois points, placer le point $D$, lire ses coordonnées, et surtout, vérifier par le calcul que ces coordonnées sont correctes. Nous faisons ici une autre version.

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, et leurs coordonnées sont aussi égales. Donc :

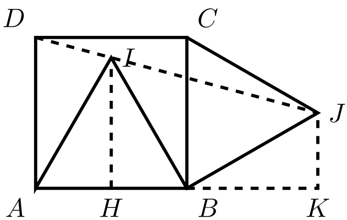
$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 0 = -1 - x_D \\ -2 - 2 = 1 - y_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = 5 \end{cases}$$

Le point $D$ a donc pour coordonnées $(-5;5)$.

**Exercice 3** (Alignement)**.** On considère la figure ci-dessous : $ABCD$ est un carré, et $AIB$ et $BCJ$ sont deux triangles équilatéraux.



1. *Vérifier graphiquement que les points $D$, $I$ et $J$ sont alignés.* On observe qu'ils sont placés sur une même droite.
2. *On se place dans le repère $(A; B; D)$ (rappel : les coordonnées de $A$, $B$ et $D$ sont alors $A\,(0;0)$, $B\,(1;0)$ et $D\,(0;1)$).*
   (a) *Montrer que les coordonnées de $I$ et $J$ sont $I\binom{0{,}5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $J\binom{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5}$.*
   Le point $H$ étant le sommet de la hauteur de $IAB$ issue de $I$, l'abscisse de $I$ est la longueur $AH$, et son ordonnée est $IH$. Puisque $IAB$ est un triangle équilatéral, $IH$ est aussi sa médiane, et $H$ est le milieu de $[AB]$. Donc $AH = \frac{1}{2}$. Calculons $HI$.
   Le triangle $IHB$ est rectangle en $H$ et $IB = 1$ et $HB = 0,5$. Donc, d'après le théorème de Pythagore (je passe les détails), $HI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $I\binom{0{,}5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
   Soit $K$ le projeté orthogonal de $J$ sur $(AB)$. L'abscisse de $J$ est $AK$, et son ordonnée est $JK$. Par un raisonnement similaire à celui précédent, nous trouvons que $JK = \frac{1}{2}$, et $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $AK = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $J\binom{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5}$.
   (b) *Montrer que les points $D$, $I$ et $J$ sont alignés.* Les points $D$, $I$ et $J$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont colinéaires. Calculons leurs coordonnées.
   $\overrightarrow{DI}\binom{0{,}5-0}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}$ et $\overrightarrow{DJ}\binom{1+\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{0{,}5-1}$, donc :
   $$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} 0,5 \\ \frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix}$$
   Utilisons la condition de colinéarité :
   $$\begin{aligned} &0,5 \times -0,5 - \frac{2+\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ =&-0,25 - \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}{4} \\ =&-0,25 - \frac{\sqrt{3}^2 - 2^2}{4} \\ =&-0,25 - \frac{3-4}{4} \\ =&-0,25 + \frac{1}{4} \\ =&0 \end{aligned}$$
   La condition de colinéarité est respectée, donc les deux vecteurs sont colinéaires, et les points $D$, $I$ et $J$ sont alignés.