Exercice 1 (Équation de fonction)**.**

1. *Calculer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(\frac{1}{3}; 2)$ et $B(1; \frac{2}{3})$.*

Le coefficient directeur est :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - 2}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{4}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Nous savons maintenant que l'équation de f est de la forme $y = -2x + b$. Reste à déterminer b.

Puisque A fait partie de la droite, ses coordonnées vérifient l'équation, donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 2 \\ -2\frac{1}{3} + b &= 2 \\ -\frac{2}{3} + b &= 2 \\ b &= 2 + \frac{2}{3} \\ b &= \frac{6}{3} + \frac{2}{3} \\ b &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

L'équation de la fonction est donc $f(x) = -2x + \frac{8}{3}$.

2. *Dresser le tableau de signe de la fonction.*

Le coefficient directeur étant négatif, la fonction est décroissante. Donc elle sera positive, puis négative. L'abscisse à laquelle la fonction change de signe est :

$$\begin{aligned}-\frac{b}{a} &= -\frac{\frac{8}{3}}{-2} \\ &= \frac{8}{3\times 2} \\ &= \frac{8}{6} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

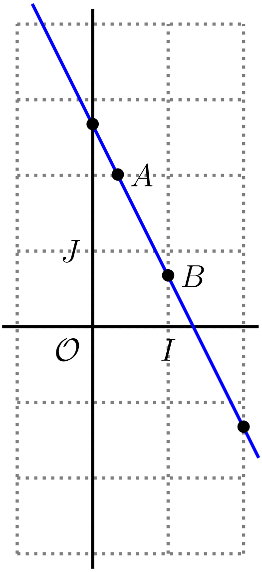
Le tableau de signe est donc :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	

3. *Dans un repère orthonormé, placer les points A, B, et tracer la droite $\mathcal{D}$. Vérifier la cohérence des réponses données aux questions précédentes.*

Pour tracer la courbe, on prend deux abscisses x au hasard, on calcule leur image, on place les points correspondants. Par exemple :

$$f(0) = -2\times 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$
$$f(2) = -2\times 2 + \frac{8}{3} = -4 + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$



On observe :

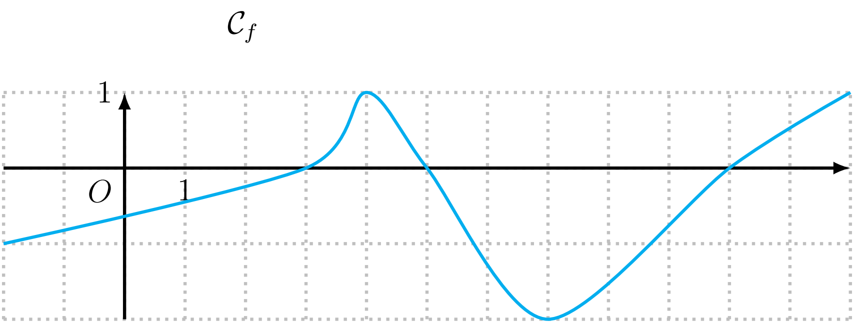
- le coefficient directeur est bien -2 (si l'on se déplace d'une unité sur l'axe des abscisses, on descend de deux unités sur l'axe des ordonnées) ;
- l'ordonnée à l'origine est bien $\frac{8}{3}$;
- la fonction est bien : positive avant $\frac{4}{3}$, négative après ;
- les points A et B appartiennent bien à la droite.

Exercice 2 (Tableau de signe)**.**

Tracer la courbe d'une fonction (pas nécessairement affine) qui puisse correspondre au tableau de signes suivant.

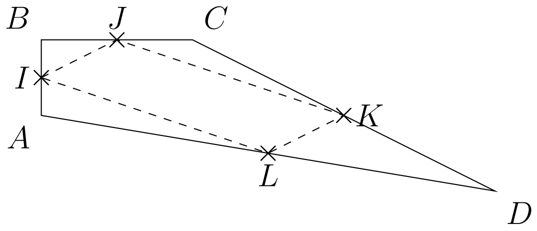
x	-2		3		5		10		12
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Voici un exemple (parmi d'autres).



Exercice 3 (Vecteurs)**.** *Soient $ABCD$ un quadrilatère quelconque, et I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.*

1. *Faire une figure.*



2. *À l'aide (entre autres) de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.*

   Puisque I est le milieu de $[AB]$, alors $2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$. De même, $2\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

3. *De même, montrer que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.*

   De même, $2\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{LD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

4. *En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.* Nous avons montré que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et $IJKL$ est un parallélogramme.
5. *Quelle propriété du collège venez-vous de démontrer ?* Nous venons de démontrer que le quadrilatère formé par les milieux des quatres côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme.