DM 2 (IN)ÉQUATIONS *2^{de}14*

CORRIGÉ

Exercice 1 (Développement — Factorisation)**.** *Soient les trois fonctions suivantes :*

- $f(x) = x^2 - 4x - 5$
- $f_1(x) = (x+1)(x-5)$
- $f_2(x) = (x-2)^2 - 9$

1. *Montrer que les trois formes f, f_1 et f_2 sont égales.* Commençons par développer f_1 :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \times x + x \times (-5) + 1 \times x + 1 \times (-5) \\ &= x^2 - 5x + x - 5 \\ &= x^2 - 4x - 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f_1 et f sont égales. De même, pour f_2 et f :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2 - 2 \times 2x + 4 - 9 \\ &= x^2 - 4x - 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f_2 et f sont égales. Les trois formes sont donc égales.

2. *Calculer $f(0)$ et $f(5)$.* Pour ces calculs, n'importe laquelle de ces formes convient, même si les calculs peuvent être plus simples avec l'une qu'avec l'autre.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 4 \times 0 - 5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= 5^2 - 4 \times 5 - 5 \\ &= 25 - 20 - 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. *En utilisant la forme appropriée, résoudre les équations suivantes :*

   (a) $f(x) = 0$: Nous utilisons ici la forme f_1 : $(x+1)(x-5) = 0$. C'est une équation produit, donc $x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$, et donc $x = -1$ ou $x = 5$.

   (b) $f(x) = -9$: Nous utilisons ici la forme f_2 : $(x-2)^2 - 9 = -9$. Donc $(x-2)^2 = 0$. Puisque 0 est le seul nombre dont le carré vaut 0, cela donne $x - 2 = 0$, et $x = 2$. L'équation a une unique solution 2.

   (c) $f(x) = -5$: Nous utilisons la forme f :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= -5 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

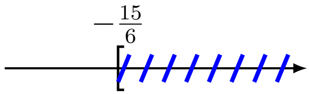
   C'est une équation produit : $x = 0$ ou $x - 4 = 0$. Donc il y a deux solutions : 0 et 4.

Exercice 2 (Inéquations)**.** *Résoudre les inéquations suivantes, et présenter le résultat sous forme d'intervalles.*

(a)

$$\begin{aligned} 4x - 7 &\leqslant 10x + 8 \\ -7 - 8 &\leqslant 10x - 4x \\ -15 &\leqslant 6x \\ -\frac{15}{6} &\leqslant x \\ -\frac{5}{2} &\leqslant x \end{aligned}$$

Représentée sur la droite des réels, cela donne :

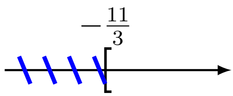


Et l'intervalle des solutions est donc $x \in \left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

(b)

$$\begin{aligned} 9 + 3x &< -2 \\ 3x &< -2 - 9 \\ 3x &< -11 \\ x &< -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

Représentée sur la droite des réels, cela donne :

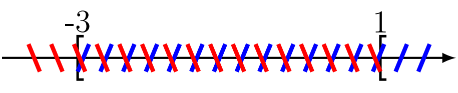


Et l'intervalle des solutions est donc $x \in \left]-\infty; -\frac{11}{3}\right[$.

(c)

$$\begin{array}{llll} 1 + x & < 2 & \text{et } x + 3 & \geqslant 0 \\ x & < 2 - 1 & \text{et } \quad x & \geqslant 0 - 3 \\ x & < 1 & \text{et } \quad x & \geqslant -3 \end{array}$$

Représentée sur la droite des réels, cela donne :



Et l'intervalle des solutions est donc $x \in [-3; 1[$.

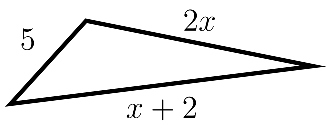
(d)

$$\begin{aligned} 2\,(x+1) &< -1+2x \\ 2x+2 &< -1+2x \\ 2x-2x &< -1-2 \\ 0 &< -3 \end{aligned}$$

Cette dernière équation est toujours fausse, donc cette inéquation n'a pas de solutions. Cela peut être traduit par $x \in \emptyset$.

Exercice 3 (Problème ouvert)**.**

Pour quelles valeurs de x est-il possible de construire le triangle ci-contre ?



Il est possible de construire un triangle si la longueur de chaque côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. Donc le nombre x doit vérifier les trois inéquations suivantes.

$$\begin{cases} 5 \leqslant 2x+x+2 \\ 2x \leqslant 5+x+2 \\ x+2 \leqslant 5+2x \end{cases}$$

Une fois résolues, ces inéquations deviennent :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \\ x \leqslant 7 \\ -3 \leqslant x \end{cases}$$

La dernière inéquation est inutile (si, comme le montre la première inéquation, $1 \leqslant x$, alors nécessairement $-3 \leqslant x$), donc nous pouvons l'ignorer. Ainsi, x vérifie : $1 \leqslant x \leqslant 7$, ou encore $x \in [1;7]$. En d'autres termes, il est possible de construire un tel triangle si x est compris entre 1 et 7.