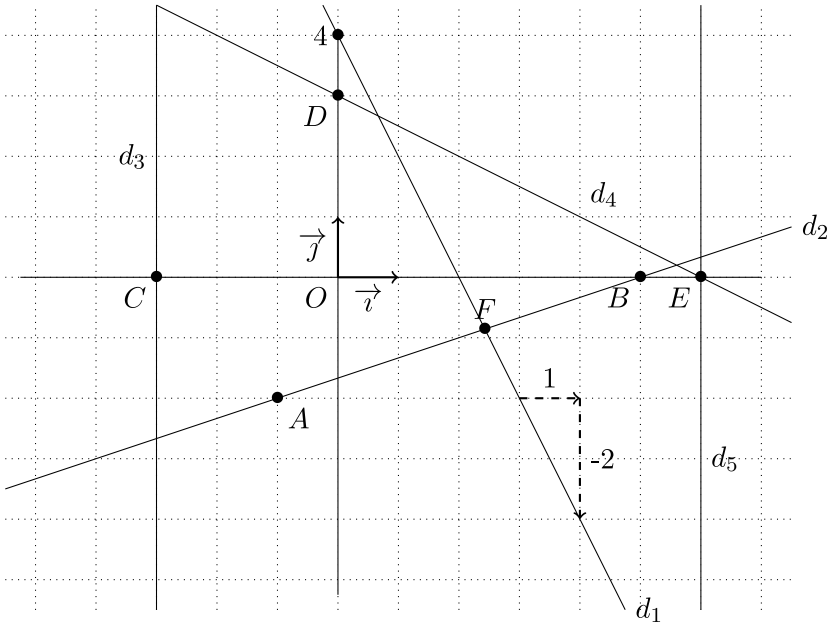
Corrigé

Systèmes et Droites

Exercice 1 (Équations de droites)**.**



1. *Donner les équations des droites d_1, d_2 et d_3.*

   d_1 : Le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine peuvent se lire sur le graphique : $d_1 : y = -2x + 4$.

   d_2 : Prenons les points $A(-1, -2)$ et $B(5, 0)$ appartenant à la droite d_2. Le coefficient directeur de la droite est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-2)}{5-(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. L'équation de la droite est donc de la forme $y = \frac{1}{3}x + b$. Or $A \in d_2$, donc $y_A = \frac{1}{3}x_A + b$, c'est-à-dire $-2 = \frac{1}{3} \times (-1) + b$, d'où $b = -\frac{5}{3}$. Ainsi l'équation de d_2 est $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

   d_3 : La droite est parallèle à l'axe des ordonnées, donc son équation est de la forme $x = c$. On prend un point appartenant à la droite, par exemple $C(-3, 0)$. Son absicce est -3, donc l'équation de la droite est $x = -3$.

2. *Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2.* On résout le système suivant,rassemblant les équations des droites d_1 et d_2 : $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$. On commence par soustraire les deux lignes.

$$\begin{cases} y - y = -2x + 4 - (\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}) \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -2x + 4 - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{7}{3}x + \frac{17}{3} \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = \frac{1}{3}\frac{17}{7} - \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

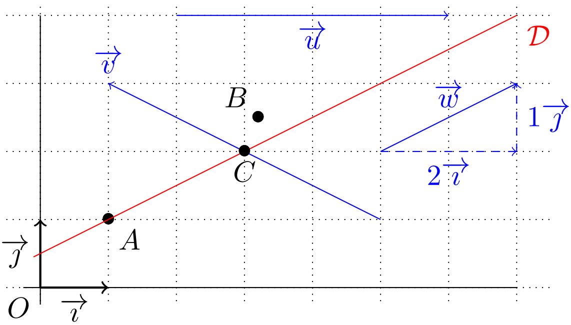
Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point F de coordonnées $\left(\frac{17}{7}, -\frac{6}{7}\right)$.

3. *Tracer, sur le graphique précédent, les droites d'équations* $y = -\frac{1}{2}x + 3$ *et* $x = 6$.

   d_4 **:** $-\frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3$, donc $D(0,3) \in d_4$; $-\frac{1}{2} \times 6 + 3 = 0$, donc $E(6,0) \in d_4$.

   d_5 **:** Puisque l'équation est de la forme $x = 6$, sa représentation est une droite verticale d'abscisse 6.

Exercice 2 (Vecteurs et droites)**.**



1. Les coordonnées sont $A(1,1)$, $\overrightarrow{u}(4,0)$ et $\overrightarrow{v}(-4,2)$.
2. $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$. Les coordonnées de $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$ sont $\binom{\frac{1}{2}\times -4}{\frac{1}{2}\times 2}$, c'est-à-dire $\binom{-2}{1}$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ sont $\binom{4+(-2)}{0+1}$, c'est-à-dire $\binom{2}{1}$.
3. (a) *Tracer la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ passant par A.* Voir sur le graphique : on trace le vecteur $\overrightarrow{w}$, puis on trace la droite « parallèle » à ce vecteur passant par A.

   (b) *Le point $B(3,2;2,5)$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? Vérifier votre réponse sur le graphique.* On commence par calculer l'équation de la droite $\mathcal{D}$. Le point $C(3,2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ (il a été obtenu par une translation de A par le vecteur $\overrightarrow{w}$, donc ses coordonnées sont la somme des coordonnées de A et $\overrightarrow{w}$). Le coefficient directeur de la droite est donc $a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$. L'équation est donc de la forme

$y = \frac{1}{2}x + b$. Puisque le point A appartient à $\mathcal{D}$, on a $y_A = \frac{1}{2}x_A + b$, donc $1 = \frac{1}{2} \times 1 + b$, donc $b = \frac{1}{2}$. L'équation de $\mathcal{D}$ est donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Vérifions si le point B appartient à $\mathcal{D}$: $\frac{1}{2} \times x_B + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3,2 + \frac{1}{2} = 2,1$. Or $2,1 \neq x_B$, donc B n'est pas sur la droite $\mathcal{D}$.

Graphiquement, on place le point B sur le graphique, et on observe qu'il n'est pas sur la droite.

4. (a) L'algorithme vérifie si le point donc les coordonnées sont données en entrées appartient ou non à la droite $\mathcal{D}$.

   (b) *On exécute cet algorithme avec $x = 3$ et $y = 2$. Qu'affiche l'algorithme ? Que peut-on en déduire ?* L'algorithme affiche `Vrai`, donc le point de coordonnées $(3, 2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 3 (Système d'équations)**.**

1. Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{l} y = -5 - x \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} y - y = -5 - x - (\frac{1}{2}x + 1) \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 0 = -\frac{3}{2}x - 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}x = 6 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x = -4 \\ y = \frac{1}{2} \times (-4) + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x = -4 \\ y = -1 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{l} 2y = x \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 2y = x \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 2y = x \\ y = \frac{1}{2} \times 2y + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 2y = x \\ y = y + 1 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 2y = x \\ 0 = 1 \end{array}\right.$

Cette dernière équation n'a pas de solutions, donc l'ensemble du système n'a pas de solutions.

2. *Le but de la question est de résoudre le système (S) suivant :*

$$(S) \left\{\begin{array}{l} x^2 + 5x - xy - 10y - 2y^2 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right.$$

   (a) En développant $(x - 2y)(5 + x + y)$, on trouve $(x - 2y)(5 + x + y) = x^2 + 5x - xy - 10y - 2y^2$, donc les équations $(x - 2y)(5 + x + y) = 0$ et $x^2 + 5x - xy - 10y - 2y^2 = 0$ sont équivalentes, donc les deux systèmes correspondants sont équivalents.

(b) $(x-2y)(5+x+y)=0$ si et seulement si $x-2y=0$ ou $5+x+y=0$ (c'est une équation produit), c'est-à-dire si $2y=x$ ou si $y=-5-x$. Donc le système précédent est équivalent au couple de systèmes :

$$\begin{cases} 2y = x \\ y = \frac{1}{2}x+1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -5-x \\ y = \frac{1}{2}x+1 \end{cases}$$

(c) *En utilisant la première question, en déduire les solutions de* (S). Le système (S) étant équivalent aux deux systèmes de la question précédente, il suffit de les résoudre pour résoudre (S). Cela a été fait dans la première question, et on a trouvé une seule solution $(-4,-1)$. Donc le système (S) a comme unique solution $(-4,-1)$.

Exercice 4 (Problème ouvert)**.** *Deux entreprises A et B emploient deux types de personnel : des cadres et des ouvriers.*

— *L'entreprise A emploie 5 cadres et 20 ouvriers. Le salaire moyen des cadres est 3020 € et celui des ouvriers 1750 €.*

— *L'entreprise B emploie 50 personnes. Le salaire moyen des cadres est 2880 € et celui des ouvriers 1650 €.*

Le directeur financier de l'entreprise B affirme que le salaire moyen pour l'ensemble de ses employés est supérieur à celui de l'entreprise A. Est-ce possible ?

Nous pouvons déjà calculer le salaire moyen de l'entreprise A : $\frac{5\times3020+20\times1750}{25} = 2004$. Le salaire moyen de l'entreprise B peut-il être supérieur à 2004 € ?

Première méthode Appelons x le nombre de cadres de l'entreprise B, et y son nombre d'ouvriers. Puisque l'entreprise a 50 employés, cela signifie que $x+y=50$, donc $x=50-y$.
La moyenne des salaires de cette entreprise est $\frac{x\times2880+y\times1650}{50} = \frac{(50-y)\times2880+y\times1650}{50}$.
Nous voulons savoir si ce salaire moyen est supérieur à 2004, donc nous résolvons l'inéquation :

$$\frac{(50-y)\times 2880 + y\times 1650}{50} \geqslant 2004$$

Cela donne : $y \leqslant \frac{1460}{41}$, c'est-à-dire $y \leqslant 35,6$ environ. Conclusion : si l'entreprise B a moins de 35 ouvriers, son salaire moyen est plus élevé que celui de l'entreprise A. Donc c'est possible.

Seconde méthode Supposons que l'entreprise B ait 48 cadres et 2 ouvriers. Alors son salaire moyen est $\frac{48\times2880+2\times1650}{50} = 2830,8$. Ce salaire est supérieur à celui de l'entreprise A, donc l'affirmation du directeur financier est possible.