Devoir surveillé — Vecteurs
Correction

Les questions originales sont en italique.

Exercice 1 (Relation de Chasles — 3 points). *Exprimer le plus simplement possible les sommes de vecteurs suivants :*

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}$
$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$
$=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

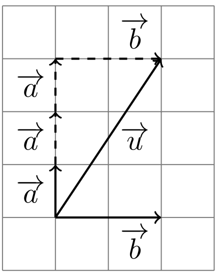
(c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

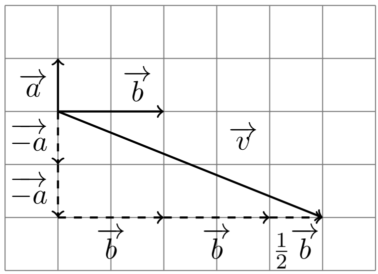
(d) $2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}$

Exercice 2 (2 points). *Exprimer les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.*

(a) $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

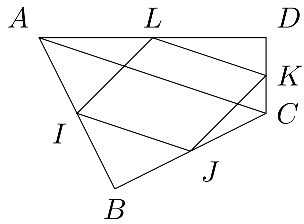
(b) $\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{a}+\frac{5}{2}\overrightarrow{b}$





Exercice 3 (5 points). *Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, et I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, et $[DA]$.*

(a) *Sur une figure, placer quatre points A, B, C et D au hasard, et placer les points I, J, K et L en fonction de A, B, C et D. Tracer les quadrilatères $ABCD$ et $IJKL$, et le segment AC.*



(b) *Le but de cette question est de prouver que* $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

(i) *Justifier que* $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$.
C'est la relation de Chasles.

(ii) *Justifier que* $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$.
I étant par définition le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$. De même pour J, milieu de $[BC]$.

(iii) *En déduire que* $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IJ}$.
La question (i) donne l'égalité $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$. Donc, puisque $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$, on a $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IJ}$.

(iv) *Justifier que* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$.
C'est encore une fois l'égalité de Chasles.

(v) *En déduire que* $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{IJ}$
Or, par (iii), $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IJ}$, donc : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ}$.
Ainsi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IJ}$.

(c) *En utilisant le même raisonnement, montrer que* $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK}$. Or, L et K étant respectivement les milieux de $[AD]$ et $[DC]$, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD}$ et $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KC}$, donc $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{KC}$.
Toujours par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}\overrightarrow{KC}$, donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{LK}$, et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

(d) *En déduire la nature du quadrilatère* $IJKL$.
Par les questions précédentes, $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IJ}$, donc $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ}$. Donc $IJKL$ est un parallélogramme.