DM — Probabilités
Correction

Exercice 1. *J'ai écrit un programme sur ma calculatrice, qui affiche aléatoirement un des nombres 0, 1, 2 ou 3. On connait les probabilités suivantes :*

- *le nombre affiché est pair :* ${}^5/_6$ *;*
- *le nombre affiché est strictement positif :* ${}^3/_4$ *;*
- *le nombre affiché est 3 :* ${}^1/_6$*.*

Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ?

On va compléter une partie du tableau suivant.

Nombre	0	1	2	3
Probabilité	p_0	p_1	p_2	p_3

On sait que la probabilité d'obtenir un nombre pair est ${}^5/_6$, donc la probabilité d'obtenir un nombre impair est $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$.

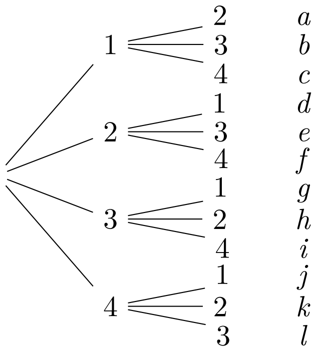
L'évènement « Obtenir un nombre impair » est constitué des évènements « Obtenir 1 » et « Obtenir 3 ». De plus, ces deux évènements sont incompatibles, donc $P(\text{« Obtenir un nombre impair »})=p_1+p_3$. Or, $p_3=\frac{1}{6}$, donc $p_1=P(\text{« Obtenir un nombre impair »})-p_3=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$.

La probabilité d'obtenir 1 est donc nulle.

On remarque que nous n'avons pas utilisé ici la probabilité d'obtenir un nombre positif. Il était aussi possible de faire avec.

Exercice 2. *Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4. On tire successivement deux boules, sans remise.*

1. *Donner la taille de l'univers de cette expérience aléatoire.*
2. *Quelle est la probabilité que la seconde boule porte un numéro plus grand que la première ?*
3. *Quelle est la probabilité que la somme des deux boules fasse 4 ?*



L'arbre correspondant à cette expérience est représenté ci-contre ; chaque branche est repérée par une lettre. Pour ne pas le surcharger, nous n'avons pas inscrit les probabilités de chaque branche, mais les issues sont équiprobables : la probabilité de chaque branche de la première expérience est $^1/_4$, et la probabilité de chaque branche de la seconde expérience est $^1/_3$.

1. La taille de l'univers est le nombre de « feuilles » (de branches terminales) de l'arbre. Il y en a 12.
2. Les branches correspondant à cette évènement sont les branches a, b, c, e, f, i. Chacune a une probabilité de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, donc l'évènement a une probabilité de $6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.
3. Les branches correspondant à cette évènement sont les branches b et g. Avec le même raisonnement, on trouve une probabilité de $2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Exercice 3. *1. On lance une pièce de monnaie deux fois de suite. Cette pièce est mal équilibrée : il y a une chance sur trois de faire pile, et deux chances sur trois de faire face.*

(a) Combien y a-t-il d'issues à cette expérience aléatoire ?

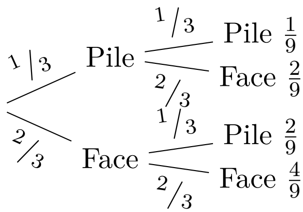
(b) Soit A l'évènement « obtenir deux fois pile ». Déterminer $P(A)$.

(c) Soit B l'évènement « obtenir exactement une fois face ». Déterminer $P(B)$.

(d) Décrire $\bar{B}$. Calculer sa probabilité.

2. On lance deux pièces de monnaie indistinguables, donnant pile et face avec les mêmes probabilités que la pièce de la question précédente. Répondre aux même questions que pour la première expérience.

1.



L'arbre correspondant à cette expérience est représenté ci-contre. La probabilité de chaque branche est affichée sur sa droite.

(a) Le nombre d'issues est le nombre de « feuilles » de l'arbre : il y en a quatre.

(b) Seule la première branche correspond à l'évènement « obtenir deux fois piles ». Sa probabilité est donc $^1/_9$.

(c) Les deuxième et troisième branches correspondent à l'évènement « obtenir exactement une fois face ». La probabilité de cet évènement est donc la somme des probabilités de ces deux branches, soit $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.

(d) $\bar{B}$ est le contraire de l'évènement « Obtenir exactement une fois face ». On peut donc le décrire comme « Ne pas obtenir exactement une fois face », ou encore « Obtenir zéro ou deux faces ». Sa probabilité est $1 - P(B) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

2. On utilise le même arbre pour représenter les expériences aléatoires correspondant aux lancers successifs de la même pièce, ou au lancer simultané de deux pièces identiques. Donc les réponses à cette question sont les mêmes que celles de la question précédente.