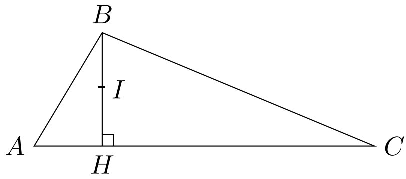
DM

Géométrie dans l'espace — Correction

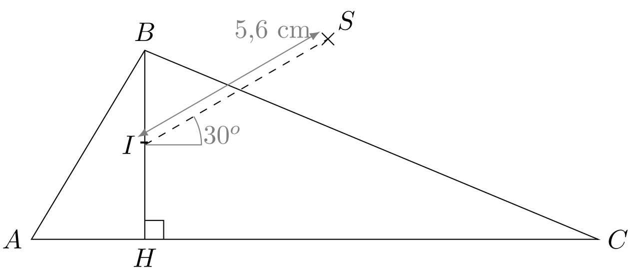
Exercice 1 (Perspective cavalière)**.** On considère le triangle suivant, avec les longueurs $BC = 13cm$, $AC = 15cm$, $AH = 3cm$.



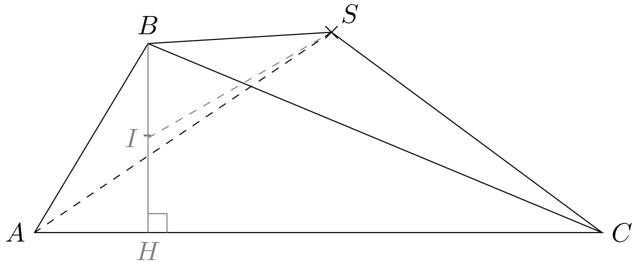
1. *Montrer que* $BH = 5cm$*.* Le triangle BHC étant rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore : $BC^2 = HC^2 + BH^2$, donc $13^2 = 12^2 + BH^2$. Ainsi, $BH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$. Donc $BH = \sqrt{25} = 5$.
2. *Dessiner en perspective cavalière la pyramide de base ABC, de hauteur $7cm$, le sommet de la pyramide étant à la verticale du point I milieu de BH. On prendra 30° comme angle des fuyantes, et 0,8 comme coefficient de réduction.*

Il est possible de dessiner cette pyramide de plusieurs manières différentes, selon que la face ABC est « à l'horizontale » ou « face à nous » (on peut aussi imaginer de placer la pyramide « la tête en bas », par exemple).

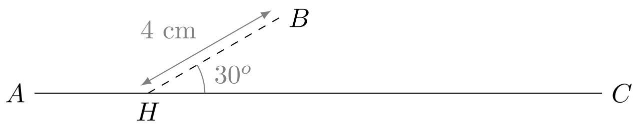
Première version : La face ABC est face à nous. Le triangle ABC étant dessiné en vrai grandeur, on trace la hauteur $[IS]$ de la pyramide : elle passe par le point I milieu de $[BH]$, et elle est perpendiculaire au plan de la feuille : c'est une fuyante. Il faut donc la dessiner avec un angle de 30° par rapport à l'horizontale, et un coefficient de réduction de 0,8 : sa longueur apparente sera $0,8 \times 7 = 5,6$ cm. Cela donne :



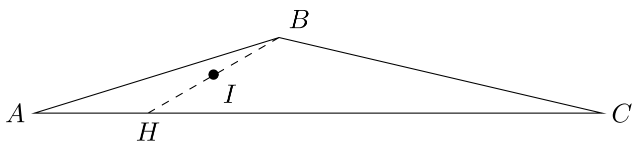
Il ne reste qu'à relier le sommet S de la pyramide aux sommets de la base, en mettant en pointillé les arêtes masquées.



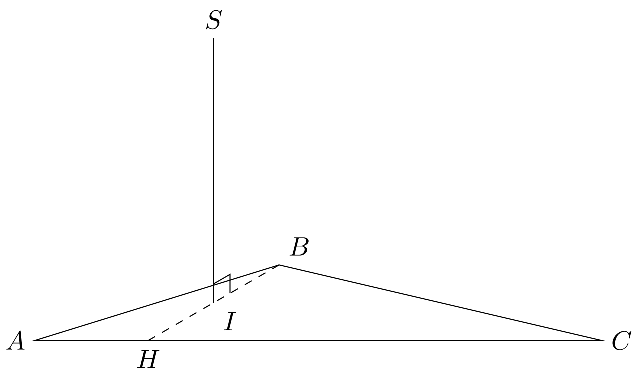
Seconde version : La face ABC est « à l'horizontale » On commence par tracer le segment $[AC]$, en vraie grandeur. Puis on trace la hauteur $[BH]$. C'est une fuyante, donc elle apparait avec un angle de trente degrés et un coefficient de réduction : sa longueur apparente est $5 \times 0,8 = 4$ cm.



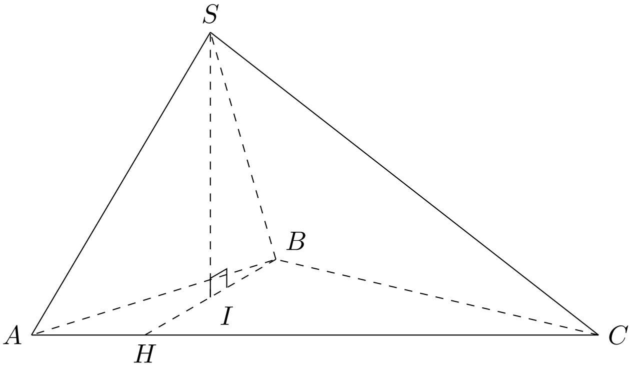
On peut maintenant finir de tracer le triangle, en traçant les côtés $[AB]$ et $[BC]$, et on place le point I, milieu de $[BH]$.



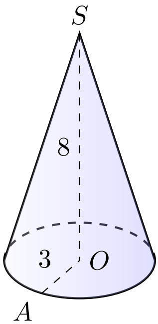
La hauteur $[SI]$ de la pyramide étant dans un plan parallèle à la feuille, elle est dessinée en vraie grandeur. C'est un segment vertical passant par I.

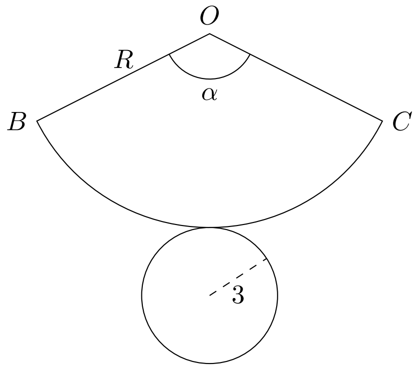


Il ne reste plus qu'à relier le sommet à chacun des trois points de la base A, B et C, en traçant en pointillé les arêtes masquées.



Exercice 2 (Surface d'un cône)**.**





On considère un cône de révolution, dont la base est un cercle de rayon 3 cm, et de hauteur 8 cm. Le but de l'exercice est de déterminer l'aire de ce solide, dont le patron est donné à droite.

Dans la suite de l'exercice, toutes les longueurs considérées sont en centimètres.

1. *On considère le triangle OAS. Quelle est sa nature ? Lire sur le dessin les longueurs des segments $[AO]$ et $[OS]$. En déduire que $SA = \sqrt{73}$.* Le triangle OAS est rectangle en O, car $[OS]$ est une hauteur. Donc on peut appliquer le théorème de pythagore, et $SA^2 = SO^2 + OA^2 = 8^2 + 3^2 = 73$. Donc $SA = \sqrt{73}$.

La longueur notée R sur le patron étant égale à SA, nous avons montré que $R = \sqrt{73}$. Nous allons maintenant calculer la valeur de l'angle α.

2. *Calculer le périmètre de la base.* La base est un cercle de rayon $OA = 3$, donc son périmètre est $2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$.
3. *La longueur de l'arc de cercle $\widehat{BC}$ est égale au périmètre de la base. D'autre part, le périmètre d'un arc de cercle est proportionnel à l'angle correspondant. Compléter le tableau de proportionnalité suivant.* La longueur de l'arc $\widehat{BC}$ est égale à la circonférence de la base du cône, soit 6π. De plus, un arc de cercle d'angle 360° correspond à un cercle complet, donc sa longueur est $2\pi R = 2\pi \times \sqrt{73}$. Nous pouvons donc remplir le tableau de proportionnalité.

Angle	α	360
Longueur de l'arc de cercle de rayon $\sqrt{73}$	6π	$2\sqrt{73}\pi$

4. *En déduire que $\alpha = \frac{1080}{\sqrt{73}}$* Un produit en croix dans le tableau de proportionnalité nous donne : $\alpha = \frac{360\times 6\pi}{2\sqrt{73}\pi} = \frac{360\times 3\times 2\pi}{2\sqrt{73}\pi} = \frac{360\times 3}{\sqrt{73}} = \frac{1080}{\sqrt{73}}$.
5. *L'aire d'une section de disque étant proportionnelle à son angle, calculer l'aire de la section de disque OBC.* Refaisons un tableau de proportionnalité, liant l'angle de la section de disque à son aire. Encore une fois, on note qu'une section de disque d'angle 360° correspond à un disque entier, donc son aire est $\pi \times R^2 = \pi \times \sqrt{73}^2 = 73\pi$.

Angle	$\alpha = \frac{1080}{\sqrt{73}}$	360
Aire de la section de disque de rayon $\sqrt{73}$		73π

   Avec un produit en croix, on en déduit que l'aire de la section de disque OBC est $\frac{\frac{1080}{\sqrt{73}}\times 73\pi}{360} = \frac{\frac{1080\times 73\pi}{\sqrt{73}}}{360} = \frac{1080\times 73\pi}{360\sqrt{73}}$.
   Pour simplifier cette expression, on remarque que $1080 = 3\times 360$ et que $73 = \sqrt{73}\times\sqrt{73}$, donc l'aire de la section est $\frac{1080\times 73\pi}{360\sqrt{73}} = \frac{3\times 360\times\sqrt{73}\times\sqrt{73}\pi}{360\sqrt{73}} = 3\pi\sqrt{73}$, ce résultat étant donné en cm^2.
6. *En déduire l'aire du cône.* L'aire du cône est égale à l'aire de la section que nous venons de calculer, plus l'aire de la base : elle est donc égale à $3\pi\sqrt{73} + \pi\times 3^2 = 3\pi(\sqrt{73}+3) \approx 108,8\ \text{cm}^2$, ce résultat étant donné en cm^2 (toutes nos données étaient des centimètres).