Exercice 1.

Partie A : Calculs algébriques

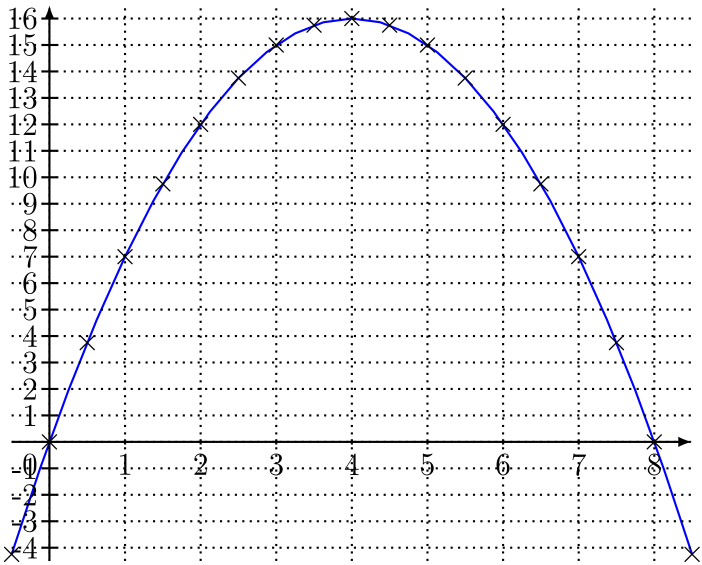
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 8x$.

1. (a) *Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.*

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \times \frac{1}{2}$$
$$= -\left(\frac{1^2}{2^2}\right) + \frac{8}{2}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{8 \times 2}{2 \times 2}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{16}{4}$$
$$= \frac{15}{4}$$

(b) *Remplir le tableau de valeurs et tracer la courbe.*

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.5	-4.25	4.5	15,75
0	0	5	15
0.5	3,75	5.5	13,75
1	7	6	12
1.5	9,75	6.5	9,75
2	12	7	7
2.5	13,75	7.5	3,75
3	15	8	0
3.5	15,75	8.5	-4,25
4	16		



2. *Factoriser f.*

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2+8x\right) \\ &= x(-x+8) \end{aligned}$$

3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)=(1-x)(x-7)+7$.* On développe le membre de droite.

$$\begin{aligned} (1-x)(x-7)+7 &= x-7-x(x-7)+7 \\ &= x-7-x^2+7x+7 \\ &= -x^2+8x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)=-(x-4)^2+16$.* On développe le membre de droite.

$$\begin{aligned} -(x-4)^2+16 &= -\left(x^2-2\times 4x+4^2\right)+16 \\ &= -x^2+8x-16+16 \\ &= -x^2+8x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

5.

   (a) *Résoudre $f(x)=0$.* On utilise la forme factorisée.

$$\begin{aligned} & f(x)=0 \\ \iff \quad & x(-x+8)=0 \\ \iff \quad & x=0 \text{ ou } -x+8=0 \\ \iff \quad & x=0 \text{ ou } x=8 \end{aligned}$$

   (b) *Résoudre $f(x) \geqslant 7$.* On utilise la forme $f(x)=(1-x)(x-7)+7$.

$$\begin{aligned} & f(x) \geqslant 7 \\ \iff \quad & (1-x)(x-7)+7 \geqslant 7 \\ \iff \quad & (1-x)(x-7) \geqslant 0 \end{aligned}$$

   Nous obtenons une inéquation produit, que l'on résout en utilisant un tableau de signes.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$(1-x)(x-7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La solution se lit sur la dernière ligne : $(1-x)(x-7) \geqslant 0$ pour $x \in [1;7]$, donc $f(x) \geqslant 7$ pour $x \in [1;7]$.

(c) La fonction f est un trinôme du second degré, et le facteur de x^2 est négatif, donc la fonction est croissante puis décroissante. L'abscisse de l'extrémum est $-\frac{b}{2a}$, soit $-\frac{8}{2\times -1} = 4$. L'ordonnée de cet extrémum est $f(4) = 16$.

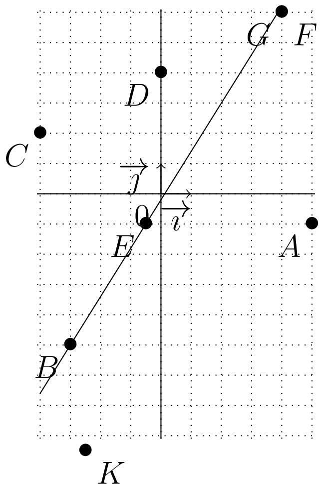
x	$-\infty$	4	$+\infty$
f	↗	16	↘

Partie B : Modélisation

1. x est la longueur CE, E appartenant au segment $[CD]$. Donc $x \in [0;8]$.
2. Le segment $[ED]$ a pour longueur $8-x$, donc l'aire $A(x)$ de $EFGD$ vaut $A(x) = x(8-x)$.
3. On reconnait dans $A(x)$ la forme factorisée de f (étudiée dans la partie A). Donc résoudre $A(x) \geqslant 7$ revient à résoudre $f(x) \geqslant 7$. Ceci a été résolu dans la partie précédente, et on trouve $x \in [1;7]$.

Exercice 2.

1.



2. (a) Les points B et E n'ayant pas la même abscisse, l'équation de la droite (BE) est de la forme $y = ax + b$.
Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{y_B - y_E}{x_B - x_E}$, soit $\frac{-5 - -1}{-3 - -0{,}5} = \frac{-4}{-2{,}5} = 1,6$. Son équation est donc de la forme $y = 1,6x + b$.
On sait que B appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation. Donc

$$\begin{aligned} -5 &= 1,6 \times -3 + b \\ -5 &= -4,8 + b \\ -5 + 4,8 &= b \\ -0,2 &= b \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc $y = 1,6x - 0,2$.

(b) Le point $G(4;6)$ appartient à la droite si ses coordonnées vérifient l'équation.

$$1,6 \times 4 - 0,2 = 6,4 - 0,2 = 6,2 \neq 6$$

Donc G n'est pas un point de la droite.

3. (a) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$, soit $\binom{-3-5}{-5--1}$. Donc $\overrightarrow{AB}\binom{-8}{-4}$.

En faisant de même avec $\overrightarrow{CD}$, on trouve $\overrightarrow{CD}\binom{4}{2}$.

Le rapport des abscisses de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ donne $\frac{-8}{4} = -2$, de même que celui des ordonnées. Donc $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, et les deux vecteurs sont colinéaires.

(b) $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-4 - -3)^2 + (2 - -5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(c) $ABCD$ est un quadrilatère qui a deux côté opposés parallèles (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires), mais pas égaux : $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$. Donc $ABCD$ est un trapèze.

4. Pour montrer que K, B et C sont alignés, on peut montrer que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires. Commençons par calculer leurs coordonnées.

   Les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont $\binom{-4--3}{2--5}$ soit $\binom{-1}{7}$. Celles de $\overrightarrow{BK}$ sont $\binom{-2{,}5--3}{-8{,}5--5}$, soit $\binom{0{,}5}{-3{,}5}$.

   Le rapport des abscisses de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ est $\frac{-1}{0{,}5} = -2$, et c'est le même que celui des ordonnées. Donc $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BK}$, et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires. Donc (BC) et (BK) sont parallèles, et B, C et K sont alignés.

   Remarque : Pour répondre à cette question, il était également possible de calculer l'équation de la droite (BC), puis de vérifier que K en faisait partie.

5. (a) *Voir figure*

   (b) On appelle x et y les coordonnées de F, soit $F\binom{x}{y}$. Les coordonées de $\overrightarrow{CF}$ sont $\binom{x-x_C}{y-y_C}$, soit $\binom{x+4}{y-2}$.

   D'autre part, les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $\binom{0--4}{4-2}$, soit $\binom{4}{2}$. Les coordonnées de $2\overrightarrow{CD}$ sont donc $\binom{2\times 4}{2\times 2}$, soit $\binom{8}{4}$.

   Enfin, puisque $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CD}$, on peut identifier leurs coordonnées, et on obtient $\left\{\begin{array}{l} x+4=8 \\ y-2=4 \end{array}\right.$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{l} x=8-4 \\ y=4+2 \end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=6 \end{array}\right.$.

   Les coordonnées de F sont donc $\binom{4}{6}$.