Exercice 1.

Partie A : Calculs algébriques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x$.

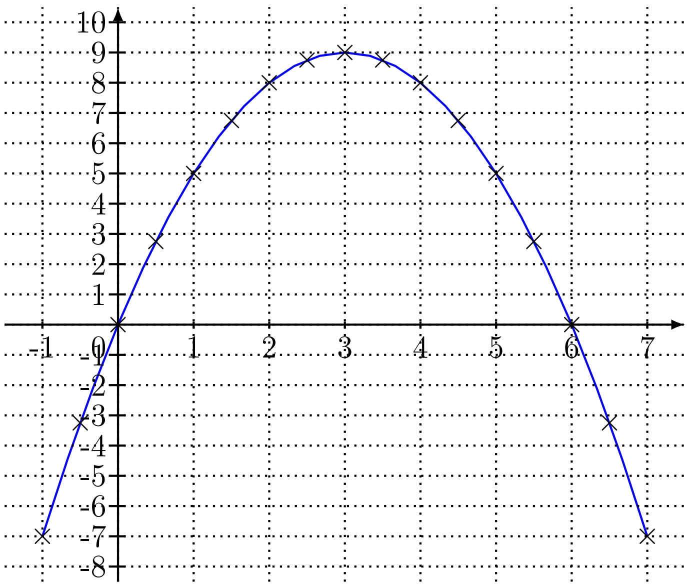
1. (a) *Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{1}{2} \\ &= -\left(\frac{1^2}{2^2}\right) + \frac{6}{2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{6 \times 2}{2 \times 2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{12}{4} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

(b) *Remplir le tableau de valeurs et tracer la courbe.*

x	$f(x)$
-1	-7
-0.5	-3,25
0	0
0.5	2,75
1	5
1.5	6,75
2	8
2.5	8,75
3	9

x	$f(x)$
3.5	8,75
4	8
4.5	6,75
5	5
5.5	2,75
6	0
6.5	-3,25
7	-7



2. *Factoriser f.*

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(x^2+6x\right) \\ &= x(-x+6) \end{aligned}$$

3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (1-x)(x-5)+5$.* On développe le membre de droite.

$$\begin{aligned} (1-x)(x-5)+5 &= x-5-x(x-5)+5 \\ &= x-5-x^2+5x+5 \\ &= -x^2+6x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = -(x-3)^2+9$.* On développe le membre de droite.

$$\begin{aligned} -(x-3)^2+9 &= -\left(x^2-2\times 3x+3^2\right)+9 \\ &= -x^2+6x-9+9 \\ &= -x^2+6x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

5.

   (a) *Résoudre $f(x) = 0$.* On utilise la forme factorisée.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff \quad & x(-x+6) = 0 \\ \iff \quad & x = 0 \text{ ou } -x+6 = 0 \\ \iff \quad & x = 0 \text{ ou } x = 6 \end{aligned}$$

   (b) *Résoudre $f(x) \geqslant 5$.* On utilise la forme $f(x) = (1-x)(x-5)+5$.

$$\begin{aligned} & f(x) \geqslant 5 \\ \iff \quad & (1-x)(x-5)+5 \geqslant 5 \\ \iff \quad & (1-x)(x-5) \geqslant 0 \end{aligned}$$

   Nous obtenons une inéquation produit, que l'on résout en utilisant un tableau de signes.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(1-x)(x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La solution se lit sur la dernière ligne : $(1-x)(x-5) \geqslant 0$ pour $x \in [1;5]$, donc $f(x) \geqslant 5$ pour $x \in [1;5]$.

(c) La fonction f est un trinôme du second degré, et le facteur de x^2 est négatif, donc la fonction est croissante puis décroissante. L'abscisse de l'extrémum est $-\frac{b}{2a}$, soit $-\frac{6}{2\times -1} = 3$. L'ordonnée de cet extrémum est $f(3) = 9$.

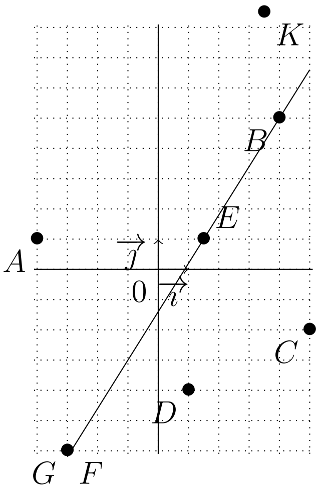
x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	$\nearrow$	9	$\searrow$

Partie B : Modélisation

1. x est la longueur CE, E appartenant au segment $[CD]$. Donc $x \in [0;6]$.
2. Le segment $[ED]$ a pour longueur $6-x$, donc l'aire $A(x)$ de $EFGD$ vaut $A(x) = x(6-x)$.
3. On reconnait dans $A(x)$ la forme factorisée de f (étudiée dans la partie A). Donc résoudre $A(x) \geqslant 5$ revient à résoudre $f(x) \geqslant 5$. Ceci a été résolu dans la partie précédente, et on trouve $x \in [1;5]$.

Exercice 2.

1.



2. (a) Les points B et E n'ayant pas la même abscisse, l'équation de la droite (BE) est de la forme $y = ax + b$.

   Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{y_B - y_E}{x_B - x_E}$, soit $\frac{5-1}{4-1{,}5} = \frac{4}{2{,}5} = 1,6$. Son équation est donc de la forme $y = 1,6x + b$.

   On sait que B appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation. Donc

$$\begin{aligned} 5 &= 1,6 \times 4 + b \\ 5 &= 6,4 + b \\ 5 - 6,4 &= b \\ -1,4 &= b \end{aligned}$$

   L'équation de la droite est donc $y = 1,6x - 1,4$.

   (b) Le point $G(-3; -6)$ appartient à la droite si ses coordonnées vérifient l'équation.

$$1,6 \times -3 - 1,4 = -4,8 - 1,4 = -6,2 \neq -6$$

   Donc G n'est pas un point de la droite.

3. (a) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$, soit $\binom{4 - -4}{5-1}$. Donc $\overrightarrow{AB}\binom{8}{4}$.

En faisant de même avec $\overrightarrow{CD}$, on trouve $\overrightarrow{CD}\binom{-4}{-2}$.

Le rapport des abscisses de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ donne $\frac{8}{-4} = -2$, de même que celui des ordonnées. Donc $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, et les deux vecteurs sont colinéaires.

(b) $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(c) $ABCD$ est un quadrilatère qui a deux côté opposés parallèles (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires), mais pas égaux : $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$. Donc $ABCD$ est un trapèze.

4. Pour montrer que K, B et C sont alignés, on peut montrer que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires. Commençons par calculer leurs coordonnées.

   Les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont $\binom{5-4}{-2-5}$ soit $\binom{1}{-7}$. Celles de $\overrightarrow{BK}$ sont $\binom{3{,}5-4}{8{,}5-5}$, soit $\binom{-0{,}5}{3{,}5}$.

   Le rapport des abscisses de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ est $\frac{1}{-0{,}5} = -2$, et c'est le même que celui des ordonnées. Donc $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BK}$, et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires. Donc (BC) et (BK) sont parallèles, et B, C et K sont alignés.

   Remarque : Pour répondre à cette question, il était également possible de calculer l'équation de la droite (BC), puis de vérifier que K en faisait partie.

5. (a) *Voir figure*

   (b) On appelle x et y les coordonnées de F, soit $F\binom{x}{y}$. Les coordonées de $\overrightarrow{CF}$ sont $\binom{x-x_C}{y-y_C}$, soit $\binom{x-5}{y+2}$.

   D'autre part, les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $\binom{1-5}{-4--2}$, soit $\binom{-4}{-2}$.

   Les coordonnées de $2\overrightarrow{CD}$ sont donc $\binom{2\times-4}{2\times-2}$, soit $\binom{-8}{-4}$.

   Enfin, puisque $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CD}$, on peut identifier leurs coordonnées, et on obtient $\begin{cases} x-5=-8 \\ y+2=-4 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} x=-8+5 \\ y=-4-2 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6 \end{cases}$.

   Les coordonnées de F sont donc $\binom{-3}{-6}$.