Mathématiques — Seconde

Table des matières

$e^{i\pi} + 1$

Chapitre 0

Algorithmique

Définition 1. Un *algorithme* est une suite finie d'opérations élémentaires permettant de résoudre un problème donné.

Exemple 2.

1. Séparer les blancs d'œuf des jaunes.
2. Mélanger le sucre aux jaunes.
3. Ajouter la farine
4. Monter les blancs en neige
5. Etc.

1 Variables

Entier, booléen, flottant, chaîne de caractère
Entrées et Sorties

2 Fonctions

3 Conditionnelles

4 Boucles bornées

5 Boucles non bornées

0^0

Chapitre 1

Ensembles de nombres

1 Équations du premier degré

TODO

Définition 3. Soit une équation d'inconnue x. Résoudre cette équation consiste à trouver toutes les valeurs de x (appelées *solutions*) qui vérifient l'équation.

Exemple 4. Soit l'équation $3x^2 + 3x - 6 = 0$.

- 1 est solution de l'équation car $3 \times 1^2 + 3 \times 1 - 6 = 0$.
- 2 n'est pas solution, car $3 \times 2^2 + 3 \times 2 - 6 \neq 0$.
- -2 est solution, car $3 \times (-2)^2 + 3 \times (-2) - 6 = 0$.

Exemple 5. Résoudre l'équation $3x + 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'équation a donc une unique solution $x = -\frac{4}{3}$.

Définition 6. Une équation du premier degré est une équation de la forme $ax+b = 0$, ou pouvant s'y ramener.

Exemple 7. Considérons l'équation $3x + 7 = 2x - 1$. Alors :

$$\begin{aligned} 3x + 7 = 2x - 1 &\Leftrightarrow 3x + 2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc c'est une équation du premier degré.

Exemple 8. L'équation $x^2 - 7x + 1 = 0$ n'est pas une équation du premier degré.

Remarque 9. Résoudre une équation du premier degré $ax + b = 0$ revient à trouver les abscisses des points d'intersection de la fonction $f : x \mapsto ax + b$ avec l'axe des abscisses.

Propriété 10 (Résolution algébrique)**.** Soit une équation $ax + b = 0$.

— Si $a \neq 0$, l'unique solution est $x = -\frac{b}{a}$.

— Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solutions.

— Si $a = 0$ et $b = 0$, tous les réels sont solutions.

2 Inéquations et Intervalles

Pour rappel, on peut représenter les solutions d'une inéquation sur la droite des réels.
TODO exemple
TODO Faire le lien avec la droite des réels rencontrée en troisième ; montrer le passage de la droite des réels à l'intervalle.

Définition 11. Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$.

- *L'intervalle* $[a, b]$ est l'ensemble des nombres compris entre a et b, inclus.
- *L'intervalle* $]a, b[$ est l'ensemble des nombres compris entre a et b, exclus.
- *L'intervalle* $[a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres supérieurs (ou égaux) à a.
- *L'intervalle* $]-\infty, b]$ est l'ensemble des nombres inférieurs (ou égaux) à b.

TODO parler de segments et demi-droites de la droite des réels

Activité 12. TODO Introduction des unions et intersections

Définition 13. Soient A et B deux ensembles de nombres.

— *L'intersection* de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des nombres appartenant à la fois à A et à B.

— *L'union* de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des nombres appartenant à A ou à B (ou aux deux).

Exemple 14. TODO

On peut représenter les solutions d'une inéquations sous forme d'un intervalle.

Exemple 15. TODO

3 Équations produit

Propriété 16 (Équation produit)**.** Soient A et B deux réels. Alors $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.
En particulier, $(ax + b)(cx + d) = 0$ si et seulement si $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

Chapitre 2

Un peu de calcul...

1 Puissances

Règles de calcul sur les puissances entières relatives.
Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires

2 Identités remarquables

Identités $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.
Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3 Racine carrée

Règles de calcul sur les racines carrées.
Relation $\sqrt{a^2} = |a|$
Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires
Démo : Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
Démo : Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Démo : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Chapitre 3

Repérage et Configurations

1 Coordonnées

Repères
Milieu
Distance

2 Configurations

Triangles, Parallélogrammes, Quadrilatères
Alignement
Médiatrices et Cercles
Projeté orthogonal

3 Trigonométrie

Rappels
Définitions
Propriétés

400%

Chapitre 4

Généralités sur les fonctions

TODO
courbe représentative
Paire, impaire
f(x)=k et f(x)=g(x) => Géométrique et algébrique

Chapitre 5

Vecteurs (géométrique et repéré)

1 Translation et Vecteur

2 Égalité de vecteurs

Caractérisation, norme

3 Coordonnées

Coordonnées
AB en fonction de A et B

4 Somme de vecteurs

Relation de Chasles

3!

Chapitre 6

Fonctions affines

1 Définitions

Définition 17. Une *fonction affine* est une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$, où a et b sont réels. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Quand $b = 0$, la fonction est de la forme $x \mapsto ax$, et on dit alors que la fonction est *linéaire*.

Définition 18. Soit une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$, et $\mathcal{D}$ sa courbe représentative.

— Le réel a est appelé *coefficient directeur*.
— Le réel b est appelé *ordonné à l'origine*.

Propriété 19 (Rappel)**.** Soient $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine, $\mathcal{D}$ sa courbe représentative, et $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de D. Alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode 20 (Détermination de l'équation d'une fonction affine)**.** Soit f une fonction affine dont on connaît la représentation graphique $\mathcal{D}$. Pour calculer a, on choisit deux points arbitraires distincts A et B de $\mathcal{D}$, et on calcule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Pour calculer b, TODO.

2 Variations

Propriété 21. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

— si $a > 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$;
— si $a = 0$, la fonction est constante sur $\mathbb{R}$;
— si $a < 0$, la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. TODO □

3 Signe d'une fonction affine

Propriété 22. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

1. Si $a = 0$, la fonction est constante, et du signe de b.
2. Si $a > 0$, la fonction est négative sur $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$, et positive sur $\left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

3. Si $a < 0$, la fonction est positive sur $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$, et négative sur $\left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

4 Signe d'un produit ; Signe d'un quotient

TODO

$2^5 - 5^2$

Chapitre 7

Probabilités

1 Expérience aléatoire

Définitions de base Loi de proba Loi des grands nombres Équiprobabilités (proba d'une issue équiprobable)

2 Évènements

Définitions : évènement, élémentaire, impossible, certain. Proba d'un évènement Proba d'un évènement équiprobable
AVEC ARBRES

3 Complémentaire

TODO

4 Union et Intersection

TODO
AVEC TABLEAU

$\det(2I_3)$

Chapitre 8

Variations de fonctions

1 Croissance et Décroissance

Croissance, décroissance, monotonie Tableau de variations Minimum et maximum Graphiquement et Calcul

2 Fonctions usuelles

Carré, racine carrée, inverse, cube Démonstration : carré, inverse, racine carrée.

3 Résolution graphique d'inéquations

f(x)>k f(x)>g(x)

$\int_0^3 x^2 dx$

Chapitre 9

Vecteurs (colinéarité)

TODO

1 Produit de vecteur par un réel

Graphique Coordonnées

2 Colinéarité

Définition Critère de colinéarité (déterminant) Transitivité

3 Applications

Alignement Parallélisme

Chapitre 10

Statistiques

TODO

$\overline{1011}^2$

Chapitre 11

Fonctions de référence

1 Développement et Factorisation

Méthode 23 (Double distributivité)**.** TODO

Méthode 24 (Factorisation)**.** TODO

Propriété 25 (Identités remarquables)**.** TODO

Méthode 26 (Équation produit nul)**.** TODO

Propriété 27 (Signe d'un produit)**.** Soient A et B deux réels. Alors $A \times B$ est positif si et seulement si A et B sont de même signe, et négatif si et seulement si ils sont de signes différents.
En particulier, $(ax+b)(cx-d) \geqslant 0$ si et seulement si $ax+b$ et $cx+d$ sont de même signe.

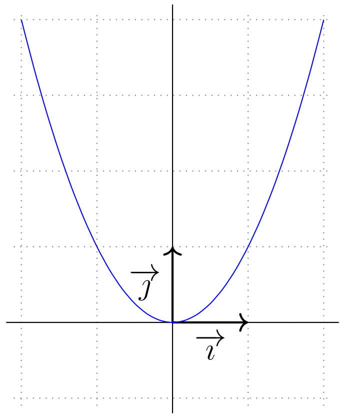
Exemple 28. Résolution de $(x+7)(2x-4) \leqslant 0$.

2 Fonction carré

Définition 29 (Fonction carré)**.** La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est appelée *fonction carré.*

Propriété 30 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction carré est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$



2.1 Équations et inéquations

Propriété 31. TODO Résolution de $x^2 = a$

Propriété 32. TODO Résolution de $x^2 < a$
TODO Résolution de $x^2 > a$

3 Trinôme

Définition 33 (Fonction trinôme)**.** Toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) est appelée fonction trinôme (ou fonction polynôme du second degré).

Dans la suite du chapitre, f est un trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Propriété 34 (Variations d'un trinôme)**.** Les variations d'un trinôme sont les suivantes.

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\searrow$		$\nearrow$

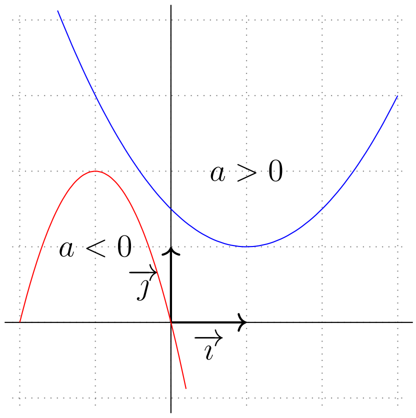
- Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\nearrow$		$\searrow$

3.1 Représentation graphique

Propriété 35 (Symétrie)**.** La courbe représentative d'un trinôme admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Propriété 36 (Représentation graphique)**.** La courbe représentative d'un trinôme est une parabole.



Définition 37. On appelle *sommet* le point qui correspond à l'extremum de la fonction. Il est situé sur l'axe de symétrie de la parabole, donc son abscisse est $-\frac{b}{2a}$.

3.2 Forme canonique

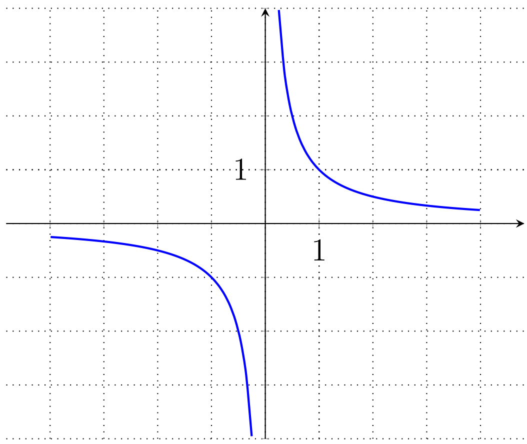
Propriété 38. Tout trinôme peut être mis sous la forme $f(x) = a(x-\beta)^2 + \gamma$, où $\beta = -\frac{b}{2a}$. Cette forme s'appelle *forme canonique*.

4 Fonction inverse

Définition 39. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est appelée *fonction inverse*.

Propriété 40 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction inverse est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘



Propriété 41. Soient a et b deux réels non nuls.

— Si a et b sont négatifs, et $a \leqslant b$, alors $0 > \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.

— Si a et b sont positifs, et $a \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b} > 0$.

Propriété 42 (Équation)**.** TODO $\frac{1}{x} = a$

Propriété 43 (Inéquation)**.** TODO $\frac{1}{x} < a$
TODO $\frac{1}{x} > a$

5 Fonctions homographiques

Définition 44. Étant donnés des réels a, b, c, d, où $c \neq 0$, on appelle *fonction homographique* la fonction définie sur son ensemble de définition par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Propriété 45. Une fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Méthode 46. Pour déterminer le signe d'une fonction homographique, on détermine le signe du numérateur et du dénomirateur, puis on fait un tableau de signe.

Exemple 47. Déterminons le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ par $f(x) = \frac{-5x-3}{2x-1}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-5x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-5x-3}{2x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc f est positive sur $\left[-\frac{3}{5}; \frac{1}{2} \right[$, et négative sur $\left] -\infty; -\frac{3}{5} \right] \cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

6 Équation et inéquation quotient

TODO pas dans la progression commune ?

Propriété 48. Soit une fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$). La fonction f est nulle si et seulement si $ax + b = 0$ et $cx + d \neq 0$.

Propriété 49. Soit une fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$). La fonction f est positive si et seulement si $ax+b$ et $cx+d$ sont de mêmes signes, et $cx+d \neq 0$.

$\sqrt{13^2 - 5^2}$

Chapitre 12

Équations de droites et Systèmes

1 Vecteur directeur

- Définition
- Droites parallèles <=> vecteurs colinéaires
- Vecteur directeur d'une même droite <=> vecteurs colinéaires

2 Équations cartésiennes et équations réduites de droites

- Définition
- vecteur directeur d'une équation cartésienne
- déterminer l'équation cartésienne
- équations réduites
- Démonstration : En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

3 Position relative de droites

- positions relatives
- conditions de parallélisme

4 Systèmes d'équations

— résolution (substitution et combinaison linéaire)
— lien avec les positions relatives de droites

Chapitre 13

Arithmétique

TODO
- Rappels de collège (multiples, diviseurs, nombres premiers) - Fractions irréductibles - Puissances - Pair, impair - Démonstrations : La somme de deux multiples de a est un multiple de a ; Le carré d'un nombre impair est impair. - Démonstartion $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ - TODO : Exercices

$$\sum_{i=0}^{3} i^2$$

Chapitre 14

Information chiffrée

1 Proportion et Pourcentage

proportion, pourcentage
pourcentage de pourcentage

2 Évolution

taux d'évolution
Variations relative et absolue
coefficient multiplicateur

3 Évolution successive et réciproque

évolutions successive et réciproque (et coefficient multiplicateur)
taux d'évolution global

$\binom{6}{2}$

Chapitre 15

Échantillonnage et Simulations

TODO