

Exemple. Simplifier les fractions : $a = \frac{35}{14}$; $b = \frac{1729}{42}$; $c = \frac{323}{70}$.

(a) Commençons par déterminer le PGCD de 35 et 14.

- *35 et 14* : On divise le plus grand des deux nombres par le plus petit, et on prend la partie entière : $35 \div 14 = 2,5$. On prend la partie entière : $35 = 14 \times 2 + ?$. Pour trouver le reste, on calcule $35 - 14 \times 2 = 7$. Donc $35 = 14 \times 2 + 7$.

Puisque le reste de la division n'est pas égal à 0, on recommence avec le plus petit des deux nombres de l'étape précédente (14), et le reste (7).

- *14 et 7* : On divise le plus grand des deux nombres par le plus petit, et on prend la partie entière : $14 \div 7 = 2$. La division donne un résultat entier (et non pas un nombre à virgules), donc on s'arrête là : le PGCD est le plus petit des deux nombres de cette étape, c'est-à-dire 7.

Nous pouvons maintenant simplifier la fraction, en divisant les deux nombres par le PGCD : $35 \div 7 = 5$ et $14 \div 7 = 2$, donc :

$$\frac{35}{14} = \frac{7 \times 5}{7 \times 2} = \frac{5}{2}$$

(b) Commençons par déterminer le PGCD de 1729 et 42. *J'utilise la même méthode, mais en expliquant moins qu'à la question précédente.*

- $1729 = 42 \times 41 + 7$ (car $1729 \div 42 \approx 41,2$ et $1729 - 42 \times 41 = 7$).
- $42 = 7 \times 6$ (car $42 \div 7 = 6$, et qu'il n'y a pas de reste).

Donc le PGCD de 1729 et 42 est 7. Nous pouvons maintenant simplifier la fraction : puisque $1729 \div 7 = 247$ et $42 \div 7 = 6$, alors :

$$\frac{1729}{42} = \frac{7 \times 247}{7 \times 6} = \frac{247}{6}$$

(c) Commençons par déterminer le PGCD de 323 et 70.

- $323 = 70 \times 4 + 43$ (car $323 \div 70 \approx 4,6$ et $323 - 70 \times 4 = 43$).
- $70 = 43 \times 1 + 27$ (car $70 \div 43 \approx 1,6$ et $70 - 43 \times 1 = 27$).
- $43 = 27 \times 1 + 16$ (car $43 \div 27 \approx 1,6$ et $43 - 27 \times 1 = 16$).
- $27 = 16 \times 1 + 11$ (car $27 \div 16 \approx 1,7$ et $27 - 16 \times 1 = 11$).
- $16 = 11 \times 1 + 5$ (car $16 \div 11 \approx 1,5$ et $16 - 11 \times 1 = 5$).
- $11 = 5 \times 2 + 1$ (car $11 \div 5 \approx 2,2$ et $11 - 5 \times 2 = 1$).
- $5 = 1 \times 5$ (car $5 \div 1 = 5$, et qu'il n'y a pas de reste).

Donc le PGCD de 323 et 70 est 1. Autrement dit, les nombres 323 et 70 sont *premiers* entre eux, et la fraction $\frac{323}{70}$ est irréductible : elle ne se simplifie pas.