1 Équation réduite de droite

Propriété (Caractérisation analytique d'une droite)**.** Soit un repère du plan $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, et d une droite de ce repère.

— Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors elle admet une unique équation de la forme ______, où c est un réel.

— Sinon, elle admet une unique équation de la forme ____________, où m et p sont des réels.

Propriété (Réciproque)**.** Soit un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

— Étant donné un réel c, l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation $x = c$ est une droite ______________________________.

— Étant donnés deux réels m et p, l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation $y = mx + p$ est une droite ______________________________.

Propriété (Déterminer une équation de droite)**.** Soit d la droite passant par les points A et B (dans un repère orthonormé).

Premier cas : $x_A = x_B$ Si A et B ont la même abscisse, alors l'équation de la droite est ________.

Secound cas : $x_A \neq x_B$ Si A et B n'ont pas la même abscisse, alors l'équation de la droite est de la forme ____________, où $m =$ est le ______________________, et p est ______________________.

Exemple 1. Déterminer l'équation réduite des droites (AB) et (AC), avec $A(2; -1)$, $B(8, 2)$ et $C(2; 3)$.

1.1 Tracé de droites

Méthode (Équation de la forme $y = mx + p$)**.**

— Choisir une première abscisse x (par exemple $x = 0$), et calculer l'ordonnée $mx+p$ pour cette valeur. Placer le point correspondant.

— Refaire la même chose avec une autre abscisse x.

— Tracer la droite passant par ces deux points.

Méthode (Équation de la forme $x = c$)**.**

- Repérer, sur l'axe des abscisses, l'abscisse c.
- Tracer la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point.

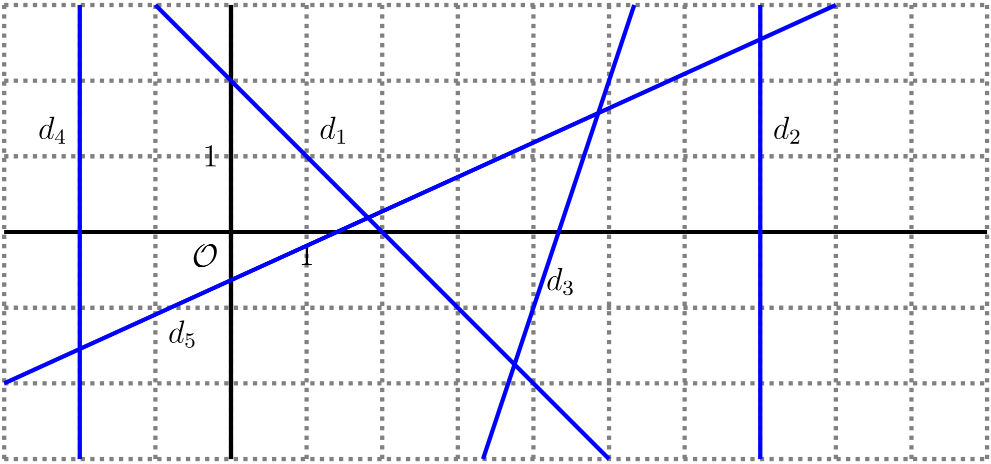
Exemple 2. Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation : $D_1 : y = \frac{x}{2} - 1$; $D_2 : x = 5$; $D_3 : x = -2$; $D_4 : y = -1,5x + 2$.

1.2 Lecture graphique d'équations

Méthode.

- Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation est de la forme $x = c$.
  - Lire les coordonnées du point d'interesction de la droite avec l'axe des abscisses.
  - L'équation de la droite est $x = c$, où c est l'ordonnée du point d'intersection.
- Si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation est de la forme $y = mx + p$.
  - Considérer un point quelconque sur la droite. Considérer le point de la droite dont l'abscisse est une unité de plus que le point précédent. Le coefficient directeur m est la différence des ordonnées de ces deux points.
  - L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Exemple 3. Déterminer par lecture graphique les équations des droites suivantes.



2 Équation cartésienne de droite

Définition et Propriété.

— Pour tous nombres réels a, b, c (tels qu'au moins a ou b est non nul), l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation $ax+by+c=0$ (appelée *équation cartésienne*) forme une droite.

— Réciproquement, toute droite est définie par une *équation cartésienne* de la forme $ax+by+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels.

Exemple 4. Dans un repère orthonormé, tracer les droites définies par les équations suivantes :
$D_1 : 2x-y+1=0$; $D_2 : 3x+9=0$.

Exemple 5. On considère la droite d d'équation cartésienne $5x+7y-10=0$.

1. Les points suivants appartiennent-ils à d ?
   $A\ (2;-3)$; $B\ (1;1)$; $C\ (-1;4)$.
2. Tracer la droite d dans un repère.

3 Vecteur directeur d'une droite

Définition. On appelle *vecteur directeur* d'une droite tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite.

Exemple 6. Déterminer les coordonnées de *plusieurs* vecteurs directeurs pour chacune des droites d_1 à d_4 de l'exemple 3.

Exemple 7. Dans un repère, tracer les droites suivantes :

D_1 : de coefficient directeur $\overrightarrow{u}\,(0;2)$, passant par $A\,(2;-1)$;

D_2 : de coefficient directeur $\overrightarrow{v}\,(-3;1)$, passant par $B\,(-3;2)$;

D_3 : de coefficient directeur $\overrightarrow{w}\,(5;-2)$, passant par $C\,(0;1)$.

Propriété. Pour droite définie par une équation cartésienne $ax+by+c=0$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Exemple 8. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites suivantes. $D_1 : 3x+4y-2=0$; $D_2 : 2x+12y+2=0$; $D_3 : \frac{x}{2}-7y-1=0$; $D_4 : x+5=0$;

Propriété. Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ce sont les vecteurs directeurs d'une même droite.

Exemple 9 (❤️). Déterminer une équation cartésienne de la droite de coefficient directeur $\overrightarrow{u}\,(3;-2)$ passant par $A\,(6;-1)$.

4 Position relative de droites

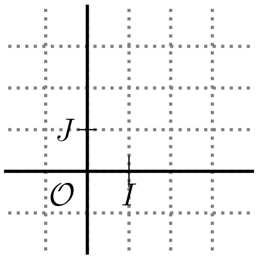
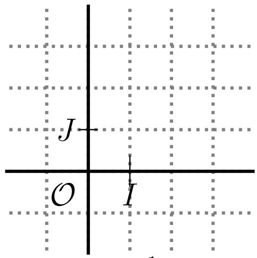
Propriété. Soient un repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, et deux droites d et d'. Les propositions suivantes sont équivalentes.

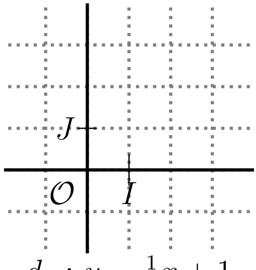
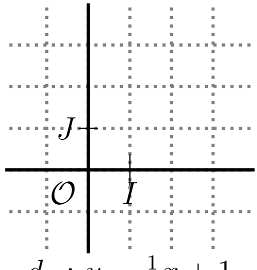
(i) Les droites d et d' sont parallèles.

(ii) Si les droites ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées : les droites d et d' ont même coefficient directeur.

(iii) Les droites d et d' ont deux vecteurs directeurs colinéaires.

Propriété (Position relative).

<table>
<tr><td>Équation de (d_1)</td><td>$x = c_1$</td><td>$y = mx + p$</td></tr>
<tr><td>Équation de (d_2)</td><td>$x = c_2$</td><td>$x = c$</td></tr>
<tr><td>Position relative de (d_1) et (d_2)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Représentation</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>$d_1 : x = 1$
$d_2 : x = 3$</td><td>$d_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
$d_2 : x = 1$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Équation de (d_1)</td><td colspan="2">$y = m_1x + p_1$</td></tr>
<tr><td>Équation de (d_2)</td><td colspan="2">$y = m_2x + p_2$</td></tr>
<tr><td>Position relative de (d_1) et (d_2)</td><td>$m_1 = m_2$</td><td>$m_1 \neq m_2$</td></tr>
<tr><td>Représentation</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>$d_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
$d_2 : y = \frac{1}{2}x - 1$</td><td>$d_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
$d_2 : y = 2x - 1$</td></tr>
</table>

Exemple 10. Dans le plan muni d'un repère, on donne les point suivants : $A(1;2)$, $B(-1;3)$, $C(25;-2)$, $D(14;-0,5)$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur pour chacune des droites (AB), (BC), et (AD).
2. En utilisant les vecteurs directeurs, déterminer lesquelles des droites (AB), (BC) et (AD) sont parallèles.

5 Système d'équation

Propriété (Interprétation géométrique)**.** Soit (S) le système d'équations $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, et d et d' les droites définies par chacune des deux équations de (S). Les solutions de (S) sont les coordonnées des éventuels points d'intersection de d et d'.

Corollaire. Avec le même système (S), trois cas seulement sont possibles :

- Le systeme (S) a une infinité de solutions si et seulement si les droites d et d' sont confondues.
- Le système (S) a une unique solution si et seulement si les droites d et d' sont sécantes. Cette solution correspond aux coordonnées de l'unique point d'intersection entre d et d'.
- Le système (S) n'a pas de solutions si et seulement si les droites d et d' sont strictement parallèles.

Exemple 11 (❤️ Résolution par substitution)**.** Déterminer l'éventuel point d'intersection des droites définies par les équations $-x+2y+8=0$ et $4x+3y+1=0$.

Exemple 12 (❤️ Résolution par combinaison linéaire)**.** On dispose de deux types d'haltères, rouges et bleues. Les haltères de même couleur pèsent le même poids. On sait que :

- deux haltères rouges et cinq haltères bleues pèsent 31 kg ;
- trois haltères rouges et deux haltères bleues pèsent 19 kg.

Déterminer le poids de chacun des deux types d'haltères.