Exercice. Sans les tracer, déterminer la position relative des couples de droites définies par les équations suivantes.

1. Équations réduites
   (a) $x = 3$ et $x = 4$
   (b) $x = -2$ et $y = -2x + 5$
   (c) $y = 2x + 3$ et $y = 2x - 8$
   (d) $y = x + 1$ et $y = x$
2. Équations cartésiennes
   (a) $2x + y - 3 = 0$ et $x + y + 1 = 0$
   (b) $x - y + 4 = 0$ et $2x - 2y + 7 = 0$
3. Équations réduites et équations cartésiennes $y = x + 1$ et $x + 2y + 3 = 0$

Exercice (Corrigé)**.** Sans les tracer, déterminer la position relative des couples de droites définies par les équations suivantes.

1. Équations réduites
   (a) $x = 3$ et $x = 4$
   Les deux équations réduites sont du type $x = c$, donc les droites sont parallèles. De plus, $3 \neq 4$, donc elles sont $\boxed{\text{strictement parallèles}}$.
   (b) $x = -2$ et $y = -2x + 5$
   L'une des équations réduites est de la forme $x = c$, l'autre de la forme $y = ax + b$, donc les droites ne sont pas parallèles : elles sont $\boxed{\text{sécantes}}$.
   (c) $y = 2x + 3$ et $y = 2x - 8$
   Les deux équations sont de la forme $y = ax + b$, et leurs coefficients directeurs sont égaux (2), donc les droites sont parallèles. De plus, les ordonnées à l'origine (3 et -8) sont différentes, donc elles sont $\boxed{\text{strictement parallèles}}$.
   (d) $y = x + 1$ et $y = 2x$
   Les coefficients directeurs des deux équations de la forme $y = ax + b$ sont différents (1 et 2), donc les droites sont $\boxed{\text{sécantes}}$.
2. Équations cartésiennes
   On rappelle qu'un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est donné par les coordonnées $\binom{-b}{a}$.
   (a) $2x + y - 3 = 0$ et $x + y + 1 = 0$
   On a les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\binom{-1}{2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{-1}{1}$. Leur déterminant est $-1 \times 1 - (-1) \times 2 = 1 \neq 0$, donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles : elles sont $\boxed{\text{sécantes}}$.

(b) $x - y + 4 = 0$ et $2x - 2y + 7 = 0$

On a les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\binom{-(-1)}{1} = \binom{1}{1}$ et $\overrightarrow{v}\binom{-(-2)}{2} = \binom{2}{2}$. Leur déterminant est $2 \times 1 - 1 \times 2 = 0$, donc les vecteurs directeurs sont colinéaires, et les droites sont parallèles. Sont-elles strictement parallèles ou confondues ?

Déterminons les coordonnées d'un point de la première droite. Par exemple, pour $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} x - y + 4 &= 0 \\ 0 - y + 4 &= 0 \\ -y + 4 &= 0 \\ -y &= -4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Donc le point de coordonnées $(0; 4)$ appartient à la première droite. Appartient-il à la seconde ? Pour vérifier, remplaçons dans l'équation de la seconde droite les x et y par les coordonnées de ce point.

$$\begin{aligned} &2x - 2y + 7 \\ &= 2 \times 0 - 2 \times 4 + 7 \\ &= 0 - 8 + 7 \\ &= -1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc les coordonnées du point de la première droite ne vérifient pas l'équation de la seconde. Nous avons trouvé un point qui appartient à une droite mais pas à l'autre : les droites ne sont donc pas confondues. Donc les droites sont $\boxed{\text{strictement parallèles}}$.

3. Équations réduites et équations cartésiennes

$y = x + 1$ et $x + 2y + 3 = 0$

Transformons la seconde équation (cartésienne) en équation réduite.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3 &= 0 \\ 2y &= -x - 3 \\ y &= \frac{-x - 3}{2} \\ y &= -0,5x - 1,5 \end{aligned}$$

Les deux équations réduites n'ont pas le même coefficient directeur : les droites sont $\boxed{\text{sécantes}}$.