Toutes les vidéos sont réalisées par Yvan Monka. Merci à lui.

5 Équations quotient nul

Exercice (Rappel : au brouillon)**.** Résoudre l'équation :

$$x\,(2x-3)=0$$

Exercice (Corrigé)**.** On reconnait une « équation produit nul » : une multiplication de deux termes est égale à 0. Donc cette équation est vérifiée si et seulement si un des deux termes (au moins) est égal à zéro.

$$\begin{array}{ccc} & x\times(2x-3)=0 & \\ x=0 & \text{ou} & 2x-3=0 \\ x=0 & \text{ou} & 2x=3 \\ x=0 & \text{ou} & x=\frac{3}{2} \end{array}$$

Cette équation a donc deux solutions : $x=0$ ou $x=\frac{3}{2}$ (on aurait aussi pu écrire : les solutions sont $x\in\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$).

Aujourd'hui, nous allons étudier comment résoudre des « équation quotient nul », comme $\frac{2x-3}{x+5}=0$. La méthode est très proche de celle des équations produit nul.

Dans votre cours :

- copiez le titre de cette partie : « 5 — Équation quotient nul » ;
- recopiez la propriété suivante :

  > **Propriété**
  >
  > Le nombre $\frac{A}{B}$ est égal à zéro si et seulement si $A=0$ et $B\neq 0$.

  En effet, si lu numérateur A est nul, alors « A divisé par un nombre » est égal à zéro, *sauf* si $B=0$, auquel cas on divise par 0, ce qui est impossible.
- recopiez l'exemple suivant :

Exemple

Résoudre l'équation : $\frac{x^2-9}{6-2x} = 0$.

On a une équation quotient nul.

1. Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur, c'est-à-dire les solutions de : $x^2 - 9 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x = \sqrt{9} &\text{ ou } x = -\sqrt{9} \\ x = 3 &\text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

   À ce stade, nous avons deux nombres qui sont peut-être des solutions : $x = 3$ ou $x = -3$. Mais il ne faut pas que ces solutions annulent le dénominateur $6 - 2x$.

2. **Méthode 1** Résolvons $6 - 2x = 0$:

$$\begin{aligned} 6 - 2x &= 0 \\ -2x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{-2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

   Donc si $x = 3$, alors il y a une division par 0 : $x = 3$ est une valeur interdite.

   Donc parmi les deux solutions que nous avions trouvées, nous excluons $x = 3$. Il ne reste qu'une seule solution : $\boxed{x = -3}$.

   Méthode 2 Pour chaque solution trouvée à la première étape ($x = 3$ ou $x = -3$), nous remplaçons le x dans le numérateur pour vérifier s'il s'annule ou non :

Si $x = 3$, alors $6 - 2x = 6 - 2 \times 3 = 0$, donc nous excluons cette solution.

Si $x = -3$, alors $6 - 2x = 6 - 2 \times (-3) = 12 \neq 0$, donc nous conservons cette solution.

Il y a donc une unique solution $\boxed{x = -3}$.

Les deux vidéos suivantes vous aideront à mieux comprendre cette méthode et cet exemple.

- `http://youtu.be/zhY1HD4oLHg`
- `http://youtu.be/OtGN4HHwEek`

Exercice.

- *Ne faites pas toutes les questions : arrêtez-vous quand vous avez fait 55 minutes de cours aujourd'hui.*
- *Si vous avez compris les équation d'un « niveau », passez au niveau suivant sans faire toutes les questions.*

Résoudre les équations suivantes.

Niveau 1
(a) $\frac{2x+1}{x-2} = 0$
(b) $\frac{x+3}{3x-6} = 0$

Niveau 2
(a) $\frac{25-x^2}{x+5} = 0$
(b) $\frac{x-2}{20-10x} = 0$

Niveau 3
(a) $\frac{x+2}{x-5} = 7$
(b) $\frac{3x-1}{2-x} = -1$

Exercice (Corrigé)**.**

1. (a) Commençons par chercher les valeurs qui annulent le numérateur :

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nous avons trouvé une seule solution. Annule-t-elle le dénominateur ?

$$-\frac{1}{2} - 2 = 1,5 \neq 0$$

Donc cette solution n'annule pas le dénominateur : elle est conservée.

Cette équation a une unique solution $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$.

(b) Commençons par chercher les valeurs qui annulent le numérateur :

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Nous avons trouvé une seule solution. Annule-t-elle le dénominateur ?

$$3 \times (-3) - 6 = -15 \neq 0$$

Donc cette solution n'annule pas le dénominateur : elle est conservée.

Cette équation a une unique solution $\boxed{x = -3}$.

2. (a) Commençons par chercher les valeurs qui annulent le numérateur :

$$\begin{aligned} 25 - x^2 &= 0 \\ 25 &= x^2 \\ x = \sqrt{25} \text{ ou } x &= -\sqrt{25} \\ x = 5 \text{ ou } x &= -5 \end{aligned}$$

Nous avons trouvé deux possibles solutions : $x = 5$ ou $x = -5$. Annulent-elles le dénominateur ?

Si $x = 5$, alors : $x+5 = 5+5 = 10 \neq 0$, donc cette solution est conservée.

Si $x = -5$**, alors :** $x + 5 = -5 + 5 = 0$, donc cette solution n'est pas conservée.

Cette équation a donc une unique solution $\boxed{x = 5}$.

(b) Commençons par chercher les valeurs de x qui annulent le numérateur.

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Nous avons trouvé une seule solution $x = 2$. Cette solution annule-t-elle le dénominateur ?

$$20 - 10 \times 2 = 0$$

Donc cette solution n'est pas valide :
$\boxed{\text{L'équation n'a aucune solutions.}}$

3. (a) Cette équation n'est pas (encore) une équation quotient, car elle n'est pas de la forme : $\frac{???}{???} = 0$. Commençons par la mettre sous cette forme.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-5} &= 7 \\ \frac{x+2}{x-5} - 7 &= 0 \\ \frac{x+2}{x-5} - \frac{7 \times (x-5)}{x-5} &= 0 \\ \frac{x+2}{x-5} - \frac{7x - 7 \times 5}{x-5} &= 0 \\ \frac{x+2}{x-5} - \frac{7x - 35}{x-5} &= 0 \\ \frac{x + 2 - (7x - 35)}{x-5} &= 0 \\ \frac{x + 2 - 7x + 35}{x-5} &= 0 \\ \frac{-6x + 37}{x-5} &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons maintenant une équation quotient nul, que nous pouvons résoudre en utilisant la même méthode que précédemment.

Commençons par déterminer les valeurs de x qui annulent le numérateur.

$$\begin{aligned} -6x + 37 &= 0 \\ -6x &= -37 \\ x &= \frac{-37}{-6} \\ x &= \frac{37}{6} \end{aligned}$$

Nous avons une potentielle solution. Annule-t-elle le dénominateur ?

$$\frac{37}{6} - 5 = \frac{37}{6} - \frac{6 \times 5}{5} = \frac{37}{6} - \frac{30}{5} = \frac{37 - 30}{5} = \frac{7}{5} \neq 0$$

Donc cette solution n'annule pas le dénominateur : elle est valide.

Cette équation a une unique solution $\boxed{x = \frac{37}{6}}$.

(b) Cette équation n'est pas (encore) une équation quotient nul.

Mettons la sous cette forme.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{2-x} &= -1 \\
\frac{3x-1}{2-x} + 1 &= 0 \\
\frac{3x-1}{2-x} + \frac{1\times(2-x)}{2-x} &= 0 \\
\frac{3x-1}{2-x} + \frac{2-x}{2-x} &= 0 \\
\frac{(3x-1)+(2-x)}{2-x} &= 0 \\
\frac{3x-1+2-x}{2-x} &= 0 \\
\frac{2x+1}{2-x} &= 0
\end{aligned}$$

C'est une équation quotient nul. Commençons par déterminer les valeurs de x qui annulent le numérateur.

$$\begin{aligned}
2x+1 &= 0 \\
2x &= -1 \\
x &= -0,5
\end{aligned}$$

Nous avons une potentielle solution $x = -0,5$. Cette valeur annule-t-elle le dénominateur ?

$$2-(-0,5) = 2,5 \neq 0$$

Donc cette solution est valide.
Cette équation a une unique solution $\boxed{x = -0,5}$.