Linéarité de la moyenne

Propriété. Soit une série de valeurs x_1, x_2, ... x_n de moyenne $\bar{x}$.
Pour tous nombres a et b, la moyenne des valeurs $a \times x_1 + b$, $a \times x_2 + b$, ... $a \times x_n + b$ est $a \times \bar{x} + b$.

Remarque. Cette propriété est aussi vraie pour une moyenne pondérée.

Exemple 1. La moyenne d'une classe à un devoir est de 8/20. Le professeur reconnait que son sujet était trop difficile et modifie chaque note de la manière suivante : il la multiplie par 1,1, puis il ajoute 2.
Sans calculer la nouvelle valeur de chacune des notes, on peut affirmer que la nouvelle moyenne est alors : $1,1 \times 8 + 2 = 8,8 + 2 = 10,8$.

Exemple 2. Dans ce contre-exemple, nous allons montrer que la propriété ci-dessus n'est pas vraie, en général, pour les autres opérations.
Nous voulons vérifier si la propriété s'applique aussi lorsqu'on élève toutes les valeurs au carré. Considérons les deux nombres -2 et 3.

- La moyenne des deux nombres est $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$.
- Élevons les deux nombres au carré : nous obtenons $(-2)^2 = 4$ et $3^2 = 9$. La nouvelle moyenne est donc : $\frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$.
- Si nous avions élevé la moyenne de départ au carré, nous aurions obtenu : $0,5^2 = 0,25$.

Donc si on élève chaque nombre d'une série au carré, la moyenne des nombres obtenus n'est pas toujours égale à la moyenne des nombres de départ, élevée au carré.