1 Vocabulaire

Définition.

- Une *expérience aléatoire* est une expérience faisant intervenir le hasard, et comportant plusieurs issues (pouvant donner plusieurs résultat). On ne connaît pas, à priori, le résultat d'une telle expérience.
- Une *issue* est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
- L'*univers* est l'ensemble de toutes les issues. Il est généralement noté Ω.
- Un *évènement* est un ensemble d'issues.
- Un *évènement élémentaire* est un évènement ne comportant qu'une seule issue.

Exemple.

- Lancer un dé équilibré à 6 faces et regarder le nombre obtenu est une expérience aléatoire. « Obtenir 2 » et « Obtenir 1 » sont des issues. « Obtenir un nombre pair » est un évènement.
- Choisir un élève au hasard dans la classe est une expérience aléatoire. « Obtenir l'élève X » est une issue. « Obtenir un garçon », « Obtenir une personne aux cheuveux longs », « Obtenir un mineur » sont des évènements.

Remarque. Dans toute la suite du cours, les univers considérés seront finis.

2 Probabilité

Définition. On considère une expérience aléatoire.

- La probabilité d'un événement élémentaire est un nombre compris entre 0 et 1, tel que la somme des probabilités de tous les événements élémentaires fait 1.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Propriété. On considère une expérience aléatoire.

- La probabilité d'un évènement A est un nombre compris entre 0 et 1 : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- L'évènement certain, contenant toutes les issues de l'univers, a une probabilité de 1.
- L'évènement vide a une probabilité de 0.

Exemple. TODO

Définition. Quand, dans une expérience aléatoire, tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'expérience est *équiprobable*.

Exemple.

- Le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée est une expérience équiprobable.
- Considérer l'âge d'un élève pris au hasard dans la classe n'est pas une expérience équiprobable.

Propriété. Soit une expérience aléatoire, ayant n issues équiprobables.

- La probabilité de chaque évènement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un évènement A est $P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre d'issues total}}$.

3 Évènements

Dans toute cette section, on considère une expérience aléatoire ayant un univers Ω fini.

Définition et Propriété.

- L'*évènement impossible* $\emptyset$ ne contient aucune issue : $P(\emptyset) = 0$.
- L'*évènement certain* Ω contient toutes les issues : $P(\Omega) = 1$.

Exemple. On lance un dé à six faces.

- L'évènement « Obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 » est certain. Sa probabilité est 1.
- L'évènement « N'obtenir ni 1, ni 2, ni 3, ni 4, ni 5, ni 6 » est impossible. Sa probabilité est 0.

Définition et Propriété. Soit A un évènement de Ω.

- L'*évènement contraire de A*, noté $\bar{A}$, est l'évènement qui contient l'ensemble des issues n'appartenent pas à A.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple. On lance un dé équilibré à 8 faces. L'évènement « Obtenir 1 ou 2 » est le contraire de l'évènement « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ».

Ainsi, $P(\text{« Obtenir 1 ou 2 »}) = 1 - P(\text{« Obtenir un nombre supérieur à 3 »})$. En effet, $P(\text{« Obtenir 1 ou 2 »}) = \frac{1}{4}$, $P(\text{« Obtenir un nombre supérieur à 3 »}) = \frac{3}{4}$, et $\frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4}$.

Définition. Soient A et B deux évènements.

- $A \cup B$ (« A union B »), est l'*union* de A et B : c'est l'évènement constitué de l'ensemble des issues appartenant à A ou à B.
- $A \cap B$ (« A inter B »), est l'*intersection* de A et B : c'est l'évènement constitué de l'ensemble des issues appartenant à A et à B.

Exemple. On lance deux dés à 6 faces, et on considère la somme des deux résultats. On considère les évènements :

- $A =$ « Obtenir un nombre pair » $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
- $B =$ « Obtenir un nombre supérieur à 7 » $= \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Alors :

- $A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $A \cap B = \{8, 10, 12\}$

Propriété. Pour toute expérience aléatoire, quels que soient les évènements A et B, on a :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Définition et Propriété. Soient deux évènements A et B.

- Ils sont dits *incompatibles* s'ils sont disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.
- Dans ce cas, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4 Représentation

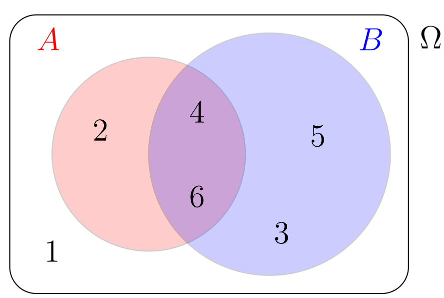
4.1 Diagramme

Description. Dans un diagramme, chaque « patate » correspond à un évènement. Les issues ne sont pas nécessairement indiquées.

Exemple. On lance un dé équilibré à six faces, et on considère les évènements :

- $A =$ « Obtenir un nombre pair »
- $B =$ « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 »

On peut représenter ceci de la manière ci-contre.



4.2 Tableau

Description. Un tableau permet de dénombrer les différentes combinaisons d'évènements.

Exemple. Dans une classe de seconde de 35 élèves, 16 élèves pratiquent le ski et 11 élèves pratiquent le surf. 4 élèves pratiquent ces deux sports.

Combien d'élèves ne pratiquent aucun sport ? Quelle est la probabilité qu'un élève tiré au hasard ne pratique aucun sport ?

	Pratiquent le surf	Ne pratiquent pas le surf	Total
Pratiquent le ski	4	12	16
Ne pratiquent pas le ski	7	12	19
Total	11	24	35

- Après avoir rempli le tableau, on lit que 12 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.
- La probabilité qu'un élève pris au hasard ne pratique aucun des deux sports est donc $\frac{12}{35}$.

4.3 Arbre pondéré

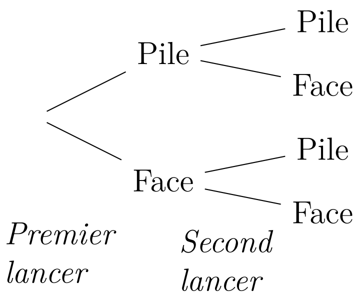
Description. Un arbre est sert à représenter les expériences aléatoires composées de plusieurs expériences.

Chaque embranchement correspond à une expérience.

Propriété.

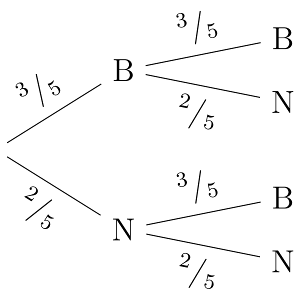
- La probabilité d'un évènement élémentaire est égale au produit des probabilités des chemins des branches qui y mènent.
- Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement est égal à $\frac{\text{Nombre de branches de l'évènement}}{\text{Nombre total de branches}}$

Exemple. On lance deux pièces de monnaie équilibrées. Quelle est la probabilité de l'évènement A : « Obtenir un pile et un face (dans n'importe quel ordre) » ?



Deux des quatre branches passent par pile et face. Donc $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Exemple. On pioche deux boules dans une urne contenunt trois boules blanches et deux noires, avec remise. Quelle est la probabilité des évènements A « Obtenir deux noires » et B « Obtenir une noire et une blanche (dans n'importe quel ordre) » ?



— Une seule branche correspond à « Obtenir deux noires ». Sa probabilité est le produit des probabilités sur son chemin. Donc $P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.
— Deux branches correspondent à « Obtenir une blanche et une noire ». La probabilité de B est la somme des probabilités de ces branches : $P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.