Exercice 1. *On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = (3x - 9)\left(-\frac{x}{2} - 1\right)$$

1. Dresser son tableau de signes.

2. Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

1. **Étape 1** On remarque que la fonction est un produit de plusieurs facteurs, et on la « découpe » ainsi :

$$f(x) = (3x - 9) \times \left(-\frac{x}{2} - 1\right)$$

On a donc deux facteurs : $3x-9$ d'une part, et $-\frac{x}{2}-1$ d'autre part.

Étape 2 On dresse le tableau de signes de chacun des facteurs.

(a) On remarque que $3x - 9$ est l'expression d'une fonction affine, de coefficient dirceteur $a = 3$ et d'ordonnée à l'origine $b = -9$. Elle est donc strictement croissante, donc d'abord négative, puis positive. Elle change de signe en $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{3} = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$	0	$+$	

(b) On remarque que $-\frac{x}{2} - 1$ est l'expression d'une fonction affine, de coefficient dirceteur $a = -\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $b = -1$. Elle est donc strictement décroissante, donc d'abord positive, puis négative. Elle change de signe en $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{-\frac{1}{2}} = -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$3x-9$		$+$	0	$-$	

Étape 3 On réunit les deux tableaux de signes dans un même tableau (en faisant bien attention à ordonner les abscisses du plus petit au plus grand), et on ajoute une ligne (vide pour le moment) avec la fonction f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$-\frac{x}{2} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x) = (3x-9)\left(-\frac{x}{2} - 1\right)$							

Étape 4 On complète la dernière ligne du tableau de signes en respectant la règle des signes :

(a) Entre $-\infty$ et -2, le premier facteur est négatif, le second est positif : le produit des deux est donc négatif.

(b) Entre -2 et 3, le premier facteur est négatif, le second est négatif : le produit des deux est donc positif.

(c) Entre 3 et $-\infty$, le premier facteur est positif, le second est négatif : le produit des deux est donc négatif.

On ajoute les 0 lorsque c'est nécessaire :

(a) Pour $x = -2$, le premier facteur (la première ligne) donne une image négative ; le second facteur (la seconde ligne) donne une image égale à 0 : un nombre négatif multiplié par un zéro donne zéro : on écrit donc un zéro dans la dernière ligne.

(b) Même chose pour $x = 3$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$-\frac{x}{2} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x) = (3x-9)\left(-\frac{x}{2} - 1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le tableau de signes de la fonction se lit dans la dernière ligne du dernier tableau.

2. *Résoudre* $f(x) \leqslant 0$. Il suffit de regarder, dans le tableau de signes de la fonction f, les signes $-$ (puisque qu'on cherche $f(x) \leqslant 0$), et de regarder les abscisses correspondantes. On lit donc :

$$x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[3; +\infty\right[$$

Exercice 2. *On considère la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ *(tous les nombres réels sauf* 3*) par :*

$$f(x) = -2\frac{5x+2}{x-3}$$

1. *Dresser son tableau de signes.*
2. *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$.

1. Le principe est le même qu'à l'exercice précédent.

   Étape 1 On décompose la fonction en plusieurs termes, ici -2 d'une part, $5x+2$ d'autre part, et $x-3$ enfin.

   Étape 2 On dresse les tableaux de variation de chacun des membres.

   (a) Le facteur -2 est toujours négatif.

x	$-\infty$		$+\infty$
-2		$-$	

(b) Le facteur $5x+2$ est une fonction affine.

x	$-\infty$		$-0,4$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	

(c) Le facteur $x-3$ est une fonction affine.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

Étape 3 On réunit tous ces facteurs dans un seul tableau.

x	$-\infty$		$-0,4$		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)=-2\frac{5x+2}{x-3}$							

Étape 4 On remplit la dernière ligne avec la règle des signes.

x	$-\infty$		$-0,4$		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)=-2\frac{5x+2}{x-3}$		$-$		$+$		$-$	

Étape 5 On complète les 0 ou les valeurs interdites sur la dernière ligne : on s'intéresse à la division $\frac{5x+2}{x-3}$.

(a) En $x=-0,4$, $5x+2=0$, et $x-3$ est égal à un nombre strictement négatif. Donc la division des deux est zéro (zéro divisé par un nombre est égal à zéro).

(b) En $x=3$, $5x+2$ est égal à un nombre positif, et $x-3$ est égal à zéro. Donc la division des deux est impossible (un nombre divisé par zéro). On marque donc une double barre pour signifier que c'est une *valeur interdite*.

x	$-\infty$		$-0,4$		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)=-2\frac{5x+2}{x-3}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Le tableau de signes est terminé : c'est la dernière ligne du tableau précédent.

2. *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. On cherche dans le tableau les signes $+$: il y en a un entre $-0,4$ et 3. Donc $x \in [-0,4;3[$ (l'intervalle est fermé à gauche car $-0,4$ est une solution acceptée, alors que 3 est une valeur interdite, donc l'intervalle est fermé à droite).