Tous les exercices mentionnés sont ceux du chapitre 3 du manuel (à partir de la page 93.

Exercice 73. Corrigé dans le manuel.

Exercice 74. Dans cet exercice, surtout, on ne commence pas par faire le tableau de signes ! Ce tableau ne fonctionne que pour résoudre une inégalité du type $\cdots \geqslant 0$ (ou $\cdots < 0$ ou ...). Ici, on ne compare pas par rapport à zéro, donc il y a une première étape pour « faire apparaître » un zéro d'un côté de l'inégalité.

1.
$$\begin{aligned}
(5x-3)(2x+1) &> (2x+1)(x-4) \\
(5x-3)\underline{(2x+1)} - \underline{(2x+1)}(x-4) &> 0 \\
(2x+1)\left[(5x-3)-(x-4)\right] &> 0 \\
(2x+1)(5x-3-x+4) &> 0 \\
(2x+1)(4x+1) &> 0
\end{aligned}$$

Traçons le tableau de signes du membre de gauche.

(a) L'expression $2x+1$ est une fonction affine de coefficient directeur 2, strictement positif, donc elle est strictement croissante. Elle est donc négative, puis positive, et elle change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$.

(b) L'expression $4x+1$ est une fonction affine de coefficient directeur 4, strictement positif, donc elle est strictement croissante. Elle est donc négative, puis positive, et elle change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$.

Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation de départ est équivalente à $(2x+1)(4x+1) > 0$, donc on cherche dans la dernière ligne du tableau de signes les symboles $+$, et on lit les abscisses correspondantes. Cela done :

$$x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

2.

$$\begin{aligned}
(3x+2)(-6x-1) &\geqslant (3x+2)^2 \\
\underline{(3x+2)}(-6x-1) - \underline{\underline{(3x+2)^2}} &\geqslant 0 \\
(3x+2)[(-6x-1)-(3x+2)] &\geqslant 0 \\
(3x+2)(-6x-1-3x-2) &\geqslant 0 \\
(3x+2)(-9x-3) &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Traçons le tableau de signes du membre de gauche.

(a) L'expression $3x+2$ est une fonction affine de coefficient directeur 3, strictement positif, donc elle est strictement croissante. Elle est donc négative, puis positive, et elle change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$.

(b) L'expression $-9x-3$ est une fonction affine de coefficient directeur -9, strictement négatif, donc elle est strictement décroissante. Elle est donc positive, puis négative, et elle change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{-9} = -\frac{1}{3}$.

Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-9x - 3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+2)(-9x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation de départ est équivalente à $(3x + 2)(-9x - 3) \geqslant 0$, donc on cherche dans la dernière ligne du tableau de signes les symboles $+$, et on lit les abscisses correspondantes. Cela done :

$$x \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$$

Pour les équations suivantes, la méthode est la même, donc je me permets d'aller plus vite. Vous non plus n'êtes pas obligés de mettre autant de détails que j'en ai écris jusqu'à présent.

3.

$$\begin{aligned}
(2x-1)\left(-5x+7\right) &< 4x^2 - 4x + 1 \\
(2x-1)\left(-5x+7\right) &< (2x)^2 - 2 \times 2x + 1^2 \\
(2x-1)\left(-5x+7\right) &< (2x-1)^2 \\
\underline{(2x-1)}\left(-5x+7\right) - \underline{\underline{(2x-1)^2}} &< 0 \\
(2x-1)\left[\left(-5x+7\right) - (2x-1)\right] &< 0 \\
(2x-1)\left(-5x+7-2x+1\right) &< 0 \\
(2x-1)\left(-7x+8\right) &< 0
\end{aligned}$$

Traçons le tableau de signes du membre de gauche.

(a) L'expression $2x - 1$ est une fonction affine qui change signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$.
(b) L'expression $-7x + 8$ est une fonction affine qui change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-7} = \frac{8}{7}$.

Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{8}{7}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-7x + 8$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)(-7x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation de départ est équivalente à $(2x - 1)(-7x + 8) < 0$, donc on cherche dans la dernière ligne du tableau de signes les symboles $-$, et on lit les abscisses correspondantes. Cela done :

$$x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{8}{7}; +\infty\right[$$

Exercice 75. Corrigé dans le manuel.

Exercice 76. La méthode est la même que dans l'exercice précédent, *sauf* qu'il y a une étape préliminaire. En effet, le tableau de signes n'est utile que pour comparer une fraction par rapport à 0, et à aucun autre nombre. Il faut donc commencer par se ramener à une inéquation avec un 0 d'un des deux côtés.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{x+8} &> -1 \\
\frac{x-4}{x+8}+1 &> 0 \\
\frac{x-4}{x+8}+\frac{x+8}{x+8} &> 0 \\
\frac{(x-4)+(x+8)}{x+8} &> 0 \\
\frac{x-4+x+8}{x+8} &> 0 \\
\frac{2x+4}{x+8} &> 0
\end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes du membre du haut.

— L'expression $2x+4$ est celle d'une fonction affine, de coefficient directeur 2, strictement positif. Elle est donc strictement croissante, donc d'abord négative, puis positive. Elle change de signe en $-\frac{b}{a}=-\frac{4}{2}=-2$.

— L'expression $x+8$ est celle d'une fonction affine, de coefficient directeur 1, strictement positif. Elle est donc strictement croissante, donc d'abord négative, puis positive. Elle change de signe en $-\frac{b}{a}=-\frac{8}{1}=-8$.

Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		-8		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+4}{x+8}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

L'inéquation originale est équivalente à $\frac{2x+4}{x+8} > 0$, donc on cherche les signes + dans la dernière ligne du tableau, et on trouve :

$$x \in \left]-\infty; -8\right[\cup \left]-2; +\infty\right[$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2x-10} &\geqslant 2 \\
\frac{x}{2x-10} - 2 &\geqslant 0 \\
\frac{x}{2x-10} - \frac{2\left(2x-10\right)}{2x-10} &\geqslant 0 \\
\frac{x}{2x-10} - \frac{4x-20}{2x-10} &\geqslant 0 \\
\frac{x-(4x-20)}{2x-10} &\geqslant 0 \\
\frac{x-4x+20}{2x-10} &\geqslant 0 \\
\frac{-3x+20}{2x-10} &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Le numérateur $-3x+20$ correspond à une fonction affine qui s'annule en $-\frac{20}{-3} = \frac{20}{3}$; le dénominateur $2x-10$ correspond à une fonction affine qui s'annule en $-\frac{-10}{2} = 5$.

x	$-\infty$		5		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
$-3x+20$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-3x+20}{2x-10}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'inéquation de départ est équivalente à $\frac{-3x+20}{2x-10} \geqslant 0$, donc en cherche dans la dernière ligne du tableau les signes $+$, et on trouve :

$$x \in \left]5; \frac{20}{3}\right]$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{1-4x}{x-3} &< -4 \\
\frac{1-4x}{x-3} + 4 &< 0 \\
\frac{1-4x}{x-3} + \frac{4(x-3)}{x-3} &< 0 \\
\frac{1-4x}{x-3} + \frac{4x-12}{x-3} &< 0 \\
\frac{(1-4x)+(4x-12)}{x-3} &< 0 \\
\frac{1-4x+4x-12}{x-3} &< 0 \\
\frac{-11}{x-3} &< 0
\end{aligned}$$

Le numérateur -11 est strictement négatif. Le dénominateur $x-3$ correspond à une fonction affine de coefficient directeur 1, donc strictement croissante, qui change de signe en $-\frac{-3}{1} = 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-11		$-$		$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$\frac{-11}{x-3}$		$+$	$\parallel$	$-$	

L'équation de départ est équivalente à $\frac{-11}{x-3} < 0$, donc on cherche dans la dernière ligne les signes $-$, et on trouve :

$$x \in \left]3; +\infty\right[$$

Exercice 77. Corrigé dans le manuel.

Exercice 87.

1. (a) On veut montrer que l'expression de l'énoncé $2000+80x-x^2$ et l'expression de la question $(-x+20)(x-60)+3200$ sont égales. Il y a deux manières de faire.

   Méthode 1 On part de $2000+80x-x^2$, que l'on essaye de factoriser en $(-x+20)(x-60)+3200$. Ça peut marcher, mais vous ne connaissez pas encore la méthode. Vous verrez l'an prochain : patience…

   Méthode 2 On part de $(-x+20)(x-60)+3200$, que l'on développe pour trouver $2000+80x-x^2$. Vous savez développer : ça devrait marcher.

$$\begin{aligned}
&(-x+20)(x-60)+3200 \\
&= -x \times x - x \times (-60) + 20 \times x + 20 \times (-60) + 3200 \\
&= -x^2 + 60x + 20x - 1200 + 3200 \\
&= -x^2 + 80x + 2000 \\
&= C(x)
\end{aligned}$$

   (b) Pour résoudre cette inéquation, on peut utiliser deux expressions de C : celle de l'énoncé, et celle utilisée à la question précédente. On cherche à résoudre $C(x) \geqslant 3200$, on va donc essayer d'abord en utilisant $C(x) = (-x+20)(x-60)+3200$ pour deux raisons : (1) on reconnaît le 3200 dans l'expression de C, et dans l'inéquation : ils vont peut-être se simplifier ;

(2) si on nous a fait prouver cette égalité à la question précédente, c'est sûrement pour nous en servir maintenant.

$$\begin{aligned} C(x) &\geqslant 3200 \\ (-x+20)(x-60)+3200 &\geqslant 3200 \\ (-x+20)(x-60) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes du membre de gauche.

L'expression $-x+20$ correspond à une fonction affine qui s'annule en $-\frac{20}{-1} = 20$; l'expression $x - 60$ à une fonction affine qui s'annule en $-\frac{-60}{1} = 60$.

x	$-\infty$		20		60		$+\infty$
$-x+20$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-60$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x+20)(x-60)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'équation de départ $C(x) \geqslant 3200$ est équivalente à $(-x+20)(x-$ 0, donc on cherche dans la dernière ligne les signes $+$, et on trouve $x \in [20;60]$.

Cela signifie que le chiffre d'affaires sera d'au moins 3 200 euros si le prix du journal baisse d'entre 20% et 60%.

2. (a) D'une part, on a :

$$\begin{aligned} C(x) &< 1100 \\ 2000+80x-x^2 &< 1100 \\ 2000-1100+80x-x^2 &< 0 \\ -x^2+80x+900 &< 0 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(-x-10)(x-90) &< 0 \\
-x\times x - x\times(-90) - 10\times x - 10\times(-90) &< 0 \\
-x^2 + 90x - 10x + 900 &< 0 \\
-x^2 + 80x + 900 &< 0
\end{aligned}$$

Donc les deux inéquations sont équivalentes (car elles sont toutes les deux équivalentes à $-x^2 + 80x + 900 < 0$).

(b) D'après la question précédente, résoudre $C(x) < 1100$ revient à résoudre $(-x-10)(x-90) < 0$. Dressons le tableau de signe de $(-x-10)(x-90)$.

L'expression $-x-10$ est une fonction affine de coefficient dirceteur -1 (strictement négatif) qui s'annule en $-\frac{-10}{-1} = -10$; $x-90$ est une fonction affine de coefficient directeur 1 (strictement positif) qui s'annule en $-\frac{-90}{1} = 90$. Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		-10		90		$+\infty$
$-x-10$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-90$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x-10)(x-90)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Mais x ne peut pas prendre n'importe quelle valeur : il doit être dans l'intervalle $[0;10]$. Nous pouvons donc ré-écrire le tableau de signes ci-dessus (seulement la dernière ligne) en respectant cette contrainte.

x	0		90		100
$(-x-10)(x-90)$		$+$	0	$-$	

Nous voulions résoudre $(-x-10)(x-90) < 0$, donc nous cherchons les signes $-$, donc $x \in]90; 100]$.

L'interprétation est que pour le chiffre d'affaires sera inférieur à 1 100 euros si le prix du journal baisse de plus de 90%.

3.

$$\begin{aligned} C(x) &> 2000 \\ 2000 + 80x - x^2 &> 2000 \\ 80\underline{x} - \underline{\underline{x}}^2 &> 0 \\ x(80-x) &> 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		80		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$80 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(-x-10)(x-90)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les solutions sont $x \in]0; 80[$: le chiffre d'affaires sera supérieur à 2 000 euros si le prix du journal baisse de moins de 80%.

$$\begin{aligned}
C(x) &\leqslant 3600 \\
2000 + 80x - x^2 &\leqslant 3600 \\
0 &\leqslant 3600 - 2000 - 80x + x^2 \\
0 &\leqslant 1600 - 80x + x^2 \\
0 &\leqslant 40^2 - 2 \times 40 \times x + x^2 \\
0 &\leqslant (40 - x)^2
\end{aligned}$$

Or un carré est toujours positif, donc $(40 - x)^2$ est toujours positif, et l'inéquation est toujours vraie. Quelle que soit la réduction, le chiffre d'affaires du journal ne sera jamais supérieur à 3 600 euros.