Ne faites pas tous les exercices : choisissez l'un des trois niveaux suivants (de plus en plus longs et difficiles) :

Niveau 1 : Ne faites que l'exercice 1.

Niveau 2 : Ne faites que l'exercice 2, mais sans faire les questions marquées d'une étoile ★ (qui sont plus difficiles, ou plus longues) : admettez le résultat, et passez à la suite.

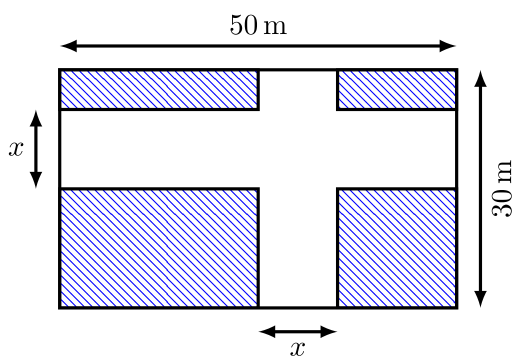
Niveau 3 : Ne faites que l'exercice 2, y compris les questions marquées d'une étoile ★.

Exercice 1. On cherche à résoudre l'inéquation $-2x^2 + 18x - 13 \geqslant 15$.

1. Montrer que résoudre cette inéquation revient à résoudre l'inéquation $(2x - 4)(-x + 7) \geqslant 0$.
2. (a) Dresser le tableau de signes des fonctions affines d'expression $2x - 4$ et $-x + 7$.
   (b) En déduire le tableau de signes de l'expression $(2x - 4)(-x + 7)$.
3. En déduire les solutions de l'inéquation de départ.

Exercice 2. *Il n'y a aucune question barrage : si vous n'arrivez pas à répondre à une question, admettez le résultat, et passez à la question suivante.*

L'architecte d'un aquarium réfléchit au plan de l'une des salles, qui aura la forme ci-contre. C'est un rectangle de 30 m par 50 m, composée de quatre bassins rectangulaires aux quatre coins de la salle (en bleu sur la figure) ; les deux bandes blanches sont les allées pour les visiteurs.



L'architecte a les contraintes suivantes :

— il faut que la superficie de l'ensemble des bassins soit supérieure à $800\,\text{m}^2$;

— il faut que la superficie des allées soit supérieure à $375\,\mathrm{m}^2$;

On appelle x (compris dans l'intervalle $[0;30]$) la largeur des allées, en mètres. L'objet de l'exercice est de déterminer quelles sont les valeurs possibles de x pour que les deux contraintes soient respectées.
On appelle B la fonction qui à x associe l'aire des aquarium, et A la fonction qui à x associe l'aire des allées.

1. (a) Calculer l'aire totale de la salle.
   (b) Expliquer pourquoi $x \in [0;30]$.
   (c) ★ Montrer que pour tout $x \in [0;30]$, on a $A(x) = -x^2 + 80x$.
   (d) En déduire que pour tout $x \in [0;30]$, on a $B(x) = x^2 - 80x + 1500$.
2. On s'intéresse à l'aire des bassins.
   (a) Expliquer pourquoi $B(x) \geqslant 800$.
   (b) Montrer que résoudre $B(x) \geqslant 800$ est équivalent à résoudre :
   $$x^2 - 80x + 700 \geqslant 0$$
   (c) Montrer que résoudre $B(x) \geqslant 800$ revient à résoudre :
   $$(x-10)(x-70) \geqslant 0$$
   (d) Dresser le tableau de signes du produit $(x-10)(x-70)$, puis en déduire que $B(x) \geqslant 800$ si $x \leqslant 10$.
3. ★ On s'intéresse à l'aire des allées.
   (a) Expliquer pourquoi $A(x) \geqslant 375$, puis montrer que résoudre $A(x) \geqslant 375$ revient à résoudre :
   $$(x-5)(x-75) \leqslant 0$$
   (b) Dresser le tableau de signe de $(x-5)(x-75)$, puis en déduire les solutions de l'inéquation $A(x) \geqslant 375$.

Si vous n'avez pas fait la question 3, admettez que pour que l'aire des allées soit supérieure à $375\,\mathrm{m}^2$, il faut que $x \geqslant 5$.

4. Conclure : Quelles valeurs l'architecte peut-elle prendre pour la largeur des allées pour que les contraintes soient respectées ?