Exercice 1. *On cherche à résoudre l'inéquation* $-2x^2 + 18x - 13 \geqslant 15$.

1. *Montrer que résoudre cette inéquation revient à résoudre l'inéquation* $(2x-4)(-x+7) \geqslant 0$.

   Plutôt que partir de $-2x^2+18x-13 \geqslant 15$ que nous allons difficilement factoriser, partons de la fin, et développons.

$$\begin{aligned}
(2x-4)\left(-x+7\right) &\geqslant 0 \\
2x \times (-x) + 2x \times 7 - 4 \times (-x) - 4 \times 7 &\geqslant 0 \\
-2x^2 + 14x + 4x - 28 &\geqslant 0 \\
-2x^2 + 18x - 28 + 15 &\geqslant 0 + 15 \\
-2x^2 + 18x - 13 &\geqslant 15
\end{aligned}$$

   Donc les deux inéquations sont bien équivalentes.

2. (a) *Dresser le tableau de signes des fonctions affines d'expression* $2x-4$ *et* $-x+7$.

   — L'expression $2x-4$ est celle d'une fonction affine de coefficient directeur 2, donc strictement croissante, qui change de signe en $-\frac{-4}{2} = 2$.

   — L'expression $-x+7$ est celle d'une fonction affine de coefficient directeur -1, donc strictement décroissante, qui change de signe en $-\frac{7}{-1} = 7$.

   Leur tableau de signes est donc le suivant.

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$2x - 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x + 7$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-4)(-x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

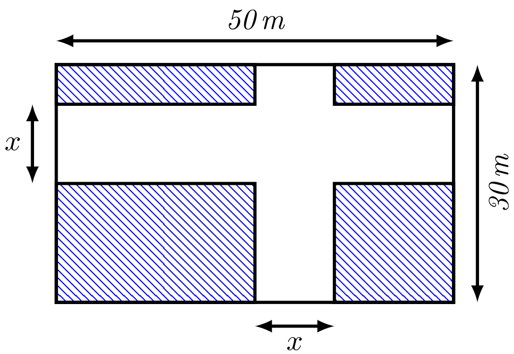
   (b) *En déduire le tableau de signes de l'expression* $(2x-4)(-x+7)$.

   Voir la question précédente.

3. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.* L'inéquation de départ est équivalente à l'inéquation $(2x-4)(-x+7) \geqslant 0$. Dans le tableau de signes, nous voyons que les solutions de cette dernière inéquations sont $x \in [2;7]$. Donc les solutions de l'inéquation de départ sont aussi $\boxed{x \in [2;7]}$.

Exercice 2.

L'architecte d'un aquarium réfléchit au plan de l'une des salles, qui aura la forme ci-contre. C'est un rectangle de 30 m par 50 m, composée de quatre bassins rectangulaires aux quatre coins de la salle (en bleu sur la figure) ; les deux bandes blanches sont les allées pour les visiteurs.



L'architecte a les contraintes suivantes :

— *il faut que la superficie de l'ensemble des bassins soit supérieure à $800\,m^2$;*
— *il faut que la superficie des allées soit supérieure à $375\,m^2$;*

On appelle x (compris dans l'intervalle $[0;30]$) la largeur des allées, en mètres. L'objet de l'exercice est de déterminer quelles sont les valeurs possibles de x pour que les deux contraintes soient respectées.
On appelle B la fonction qui à x associe l'aire des aquarium, et A la fonction qui à x associe l'aire des allées.

1. (a) *Calculer l'aire totale de la salle.* La salle est un rectangle de 50 m par 30 m : son aire est $30 \times 50 = 1\,500\,\text{m}^2$.

   (b) *Expliquer pourquoi $x \in [0;30]$.* Le nombre x représente une longueur : il est donc positif. La plus grande allée possible se trouve dans le cas où elle prend toute la largeur, c'est-à-dire $x = 30$. Donc $x \in [0;30]$.

(c) ★ *Montrer que pour tout $x \in [0;30]$, on a $A(x) = -x^2 + 80x$.* L'allée est composée de deux rectangles : un rectangle qui va du bord gauche au bord droit du rectangle (de dimensions x par 50 m), et l'autre allant du bord bas au bord haut (de dimensions x par 30 m). Mais avec ce calcul, nous avons compté deux fois le carré à l'intersection des deux rectangles, de côté x. L'aire est donc :

$$A(x) = 30x + 50x - x^2 = 80x - x^2 = -x^2 + 80x$$

(d) *En déduire que pour tout $x \in [0;30]$, on a $B(x) = x^2 - 80x + 1500$.* L'aire des bassins est égale à l'aire totale moins l'aire des allées, soit :

$$\begin{aligned} B(x) &= 1500 - A(x) \\ &= 1500 - \left(-x^2 + 80x\right) \\ &= 1500 + x^2 - 80x \\ &= x^2 - 80x + 1500 \end{aligned}$$

2. *On s'intéresse à l'aire des bassins.*

(a) *Expliquer pourquoi $B(x) \geqslant 800$.* La superficie de l'ensemble des bassins doit être supérieure à $800\,\text{m}^2$, donc $B(x) \geqslant 800$.

(b) *Montrer que résoudre $B(x) \geqslant 800$ est équivalent à résoudre :*

$$x^2 - 80x + 700 \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} B(x) &\geqslant 800 \\ x^2 - 80x + 1500 - 800 &\geqslant 800 - 800 \\ x^2 - 80x + 700 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(c) *Montrer que résoudre $B(x) \geqslant 800$ revient à résoudre :*

$$(x-10)(x-70) \geqslant 0$$

$$\begin{aligned}(x-10)(x-80) &\geqslant 0\\ x\times x + x\times(-70) - 10\times x - 10\times(-70) &\geqslant 0\\ x^2 - 70x - 10x + 700 &\geqslant 0\\ x^2 - 80x - 700 &\geqslant 0\\ B(x) &\geqslant 800\end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne se fait en appliquant la démonstration de la question précédente.

(d) *Dresser le tableau de signes du produit $(x-10)(x-70)$, puis en déduire que $B(x) \geqslant 800$ si $x \leqslant 10$.*

— L'expression $x - 10$ est celle d'une fonction affine, de coefficient directeur 1, strictement croissante, qui change de signe en $-\frac{-10}{1} = 10$.

— L'expression $x - 70$ est celle d'une fonction affine, de coefficient directeur 1, strictement croissante, qui change de signe en $-\frac{-70}{1} = 70$.

Remarquons que l'abscisse 70 n'apparaît pas dans le tableau car elle se trouve hors de l'ensemble de définition de la fonction.

x	0		10		30
$x - 10$		$-$	0	$+$	
$x - 70$		$-$		$-$	
$(x-10)(x-70)$		$+$	0	$-$	

Donc les solutions de $(x-10)(x-70) \geqslant 0$ sont $x \leqslant 10$. Mais puisque cette inéquation a les mêmes solutions que $B(x) \geqslant 800$ (voir question 2c), alors les solutions de $B(x) \geqslant 800$ sont également $\boxed{x \leqslant 10}$.

3. ★ *On s'intéresse à l'aire des allées.*

(a) *Expliquer pourquoi $A(x) \geqslant 375$, puis montrer que résoudre $A(x) \geqslant 375$ revient à résoudre :*

$$(x-5)(x-75) \leqslant 0$$

L'aire des allées doit être supérieure à $375\,\mathrm{m}^2$, donc $A(x) \geqslant 375$.

$$\begin{aligned}
(x-5)(x-75) &\leqslant 0 \\
x \times x + x \times (-75) - 5 \times x - 5 \times (-75) &\leqslant 0 \\
x^2 - 75x - 5x + 375 - 375 &\leqslant 0 - 375 \\
x^2 - 80x &\leqslant -375 \\
-x^2 + 80x &\geqslant 375 \\
A(x) &\geqslant 375
\end{aligned}$$

Pour passer de l'avant-avant-dernière ligne à l'avant-dernière ligne, on a multiplié l'ensemble par -1.

(b) *Dresser le tableau de signe de $(x-5)(x-75)$, puis en déduire les solutions de l'inéquation $A(x) \geqslant 375$.*

x	0		5		30
$x - 5$		$-$	0	$+$	
$x - 75$		$-$		$-$	
$(x-5)(x-75)$		$+$	0	$-$	

Nous résolvons cette fois $(x-5)(x-75) \leqslant 0$, donc nous cherchons les signes $-$ dans le tableau, et donc $x \geqslant 5$. Mais puisque cette inéquation est équivalente à $A(x) \geqslant 375$, alors les solutions sont $\boxed{x \geqslant 5}$.

Si vous n'avez pas fait la question 3, admettez que pour que l'aire des allées soit supérieure à $375\,\mathrm{m}^2$, il faut que $x \geqslant 5$.

4. *Conclure : Quelles valeurs l'architecte peut-elle prendre pour la largeur des allées pour que les contraintes soient respectées ?*

   Nous avons montré que pour respecter les contraintes, d'une part, $x \geqslant 5$, et d'autre part $x \leqslant 10$. L'intersection de ces deux contraintes est $x \in [5; 10]$. Donc les allées doivent avoir une largeur comprise entre $5\,\mathrm{m}$ et $10\,\mathrm{m}$.