

Exercice 1. Dans un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. Montrer que les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
3. En déduire les coordonnées de D .

Exercice 1 (Corrigé).

1. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ -4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont égaux.
3. D'une part, puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors les coordonnées de \overrightarrow{DC} sont $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

D'autre part, on a :

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_D \\ 1 - y_D \end{pmatrix}$$

Donc :

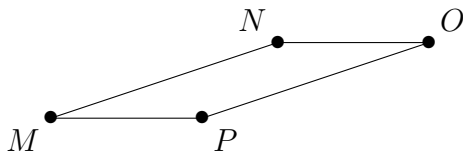
$$\begin{cases} 1 - x_D = -2 \\ 1 - y_D = -7 \end{cases}$$

Et donc $x_D = 1 + 2 = 3$ et $y_D = 1 + 7 = 8$: les coordonnées de D sont $\boxed{D\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}}$.

Exercice 2. Même question avec les points $P \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: déterminer les coordonnées du point N tel que $MNOP$ soit un parallélogramme.

Exercice 2 (Corrigé). Appliquons la même méthode qu'à l'exercice précédent.

Pour nous aider à voir les égalités vectorielles, traçons un parallélogramme (sans respecter les coordonnées).



Il y a quatre égalités vectorielles que nous pouvons utiliser : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NO}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP}$.

Utilisons la dernière (au hasard : dans ce cas-là, toutes fonctionnent).

D'une part :

$$\overrightarrow{NM} \begin{pmatrix} x_M - x_N \\ y_M - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_N \\ -1 - y_N \end{pmatrix}$$

D'autre part, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP}$, et les coordonnées de \overrightarrow{OP} sont : $\overrightarrow{OP} \begin{pmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 - 0 \\ 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Nous avons exprimé les coordonnées de \overrightarrow{NM} de deux manières différentes : elles sont donc égales : $\begin{pmatrix} 1 - x_N \\ -1 - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Nous obtenons deux équations :
$$\begin{cases} 1 - x_N = 2,5 \\ -1 - y_N = 5 \end{cases}$$

Réolvons les.

$$1 - x_N = 2,5$$

$$-x_N = 2,5 - 1$$

$$-x_N = 1,5$$

$$x_N = -1,5$$

$$-1 - y_N = 5$$

$$-y_N = 5 + 1$$

$$-y_N = 6$$

$$y_N = -6$$

Les coordonnées du point N sont donc $\boxed{N \begin{pmatrix} -1,5 \\ -6 \end{pmatrix}}$.