1 Images et Antécédents

1.1 Définitions

Définition 1. Étant donné un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, définir une *fonction* de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un unique nombre $f(x)$ de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{D}$ est appelé *ensemble de définition de* f ;
- $f(x)$ est *l'image* de x par f ;
- x est un *antécédent* de $f(x)$ par x.

Exemple 2. Soit la fonction V qui à une longueur c (exprimée en mètre) associe le volume du cube de côté c (exprimé en mètres cube).

On peut exprimer cette fonction sous la forme :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ c &\mapsto c^3 \end{aligned}$$

Cela signifie :

— Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}^+$ (l'ensemble des nombres réels positifs). En d'autres termes, on peut calculer $V(x)$ pour n'importe quel nombre positif x (mais calculer $V(-7)$, par exemple, n'a pas de sens).

— L'ensemble image est $\mathbb{R}$ (les images de la fonction sont des nombres réels).

— Pour calculer l'image d'un nombre c, on applique la formule c^3.

On a alors $V(2) = 2^3 = 8$, ce qui signifie : « Le volume d'un cube de côté 2 m est 8 m^3.

Remarque. Assez souvent en seconde, on notera simplement : $V : c \mapsto c^3$ (sans les ensembles de définition et ensembles image).

Propriété 3.

— Tout nombre x de l'ensemble de définition de f a une *unique* image par f.

— Un nombre réel a a zéro, un ou plusieurs antécédents par f.

Exemple 4.

1. Pour tout nombre x, on lance une pièce équilibrée. Si elle tombe sur pile, on multiplie x par deux ; sinon, on le divise par deux.

   Ceci n'est pas une fonction car en partant du nombre 8 (par exemple), on peut tomber sur 16 (si la pièce retombe sur pile), ou 4 (si la pièce retombe sur face). Or, pour un même nombre de départ x, une fonction produit *toujours* la même image $f(x)$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.

   — Puisque $f(4) = 4^2 = 16$, et $f(-4) = (-4)^2 = 16$, alors $f(4) = f(-4) = 16$ et le nombre 16 a deux antécédents par f : 4 et -4.

   — 0 est le seul nombre dont le carré vaut 0, donc 0 n'a qu'un seul antécédent (il existe un seul nombre x tel que $f(x) = 0$, et c'est $x = 0$).

   — Puisqu'un carré est toujours positif, alors -5 n'a pas d'antécédent : il n'existe pas de x tel que $f(x) = -5$.

Définition 5. L'*ensemble image* d'une fonction f est l'ensemble des valeurs que peut prendre $f(x)$ lorsque x parcourt son ensemble de définition.

Méthode 6.

— Pour déterminer l'image de x par f, on calcule $f(x)$ en remplaçant x par sa valeur dans la formule de f.

— Pour trouver les antécédentes de a par f, on résout l'équation $f(x) = a$.

Exemple 7. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x-2$.

1. Calculer $f(-3)$.
2. Calculer l'image de 7 par f.
3. Résoudre $f(x) = 4$.
4. Quels sont les antécédents de -5 par f ?

rrigé). Pour calculer $f(-3)$, on remplace x par -3 dans l'expression de f : $f(-3) = 3 \times (-3) - 2 = -6 - 2 = -8$.

rrigé). L'image de 7 par f est $f(7) = 3 \times 7 - 2 = 21 - 2 = 19$.

rrigé). Résolvons l'équation.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \\ 3x - 2 &= 4 \\ 3x &= 4 + 2 \\ 3x &= 6 \\ x &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Donc 4 a un unique antécédent par f : 2 (on peut vérifier en calculant $f(2) = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$).

4 (corrigé). Pour chercher les antécédents de -5 par f, on résout l'équation $f(x) = -5$, c'est-à-dire $3x - 2 = -5$, et on obtient $x = -1$. Donc l'unique antécédent de -5 par f est -1 (en d'autres termes : $f(-1) = -5$).

1.2 Représentation et lecture graphiques

Définition 8. Dans le plan muni d'un repère, la *courbe représentative* (ou *représentation graphique*) de la fonction f est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points $(x, f(x))$, où x décrit le domaine de définition de f.

Méthode 9. Pour lire l'image de x par f :

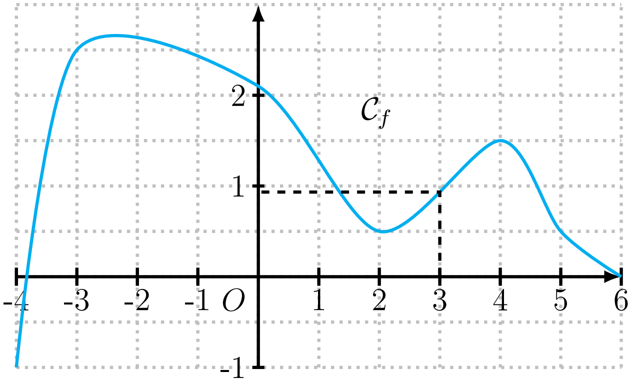
— on repère x sur l'axe des abscisses ;

— on trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse x ;

— on repère le point M, intersection de la courbe de f et de la droite précédente ;

— on lit l'ordonnée de ce point M : c'est l'image de x par f.

Exemple 10. Lecture graphique de $f(3)$ (c'est-à-dire l'image de 3 par f).

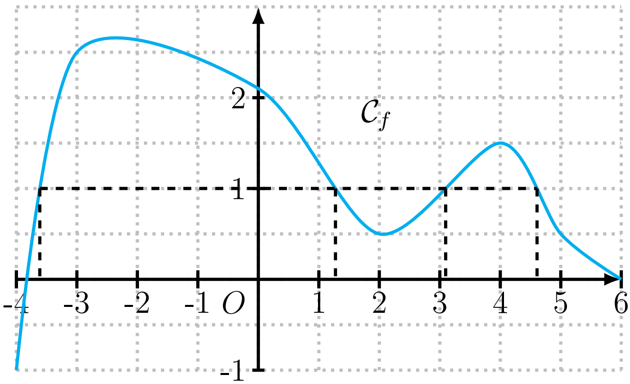


On lit graphiquement : $f(3) \approx 0,9$.

Méthode 11. Pour lire les antécédents de a par f :

- on repère a sur l'axe des ordonnées ;
- on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée a ;
- on repère les points d'intersection de la courbe de f et cette droite ;
- on lit les abscisses de ces points d'intersection : ce sont les antécédents de a par f.

Exemple 12. Résolution graphique de $f(x) = 1$ (c'est-à-dire recherche des antécédents de 1 par f).



Les antécédents de 1 par f sont donc environ : -3,6 ; 1,2 ; 3,1 et 4,6.

Remarque. Ces méthodes ne permettent que d'obtenir des valeurs approchées. Pour obtenir des valeurs exactes, le calcul de $f(x)$ ou la résolution algébrique de $f(x) = a$ sont nécessaires.