Comprenez et recopiez ceci sur votre cahier. Ne recopiez pas l'énoncé qui vous a été distribué hier. Les remarques sont là pour vous donner plus d'explications ; vous n'êtes pas obligés de les recopier.

1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 - x - 4$.*
   (a) *Calculer $f(2)$ et $f(-2)$. La fonction est-elle impaire ?*

   Remarque

   La phrase « Tous les élèves de 2^de^3 ont-ils lu Harry Potter » est-elle vraie ou fausse ?
   - Pour pouvoir répondre oui, il faut poser la question à CHACUN et CHACUNE des élèves, et que chacun et chacune réponde oui.
   - Pour pouvoir répondre non, il suffit qu'un seul ou une seule élève réponde non.

   C'est la même chose pour les fonctions paires et impaires :
   - Pour qu'une fonction SOIT impaire, il faut que pour TOUT nombre x, on ait : $f(-x) = -f(x)$.
   - Pour qu'une fonction NE SOIT PAS impaire, il suffit que pour une seule valeur de x, $f(-x) \neq -f(x)$.

   D'une part : $f(2) = 2^2 - 2 - 4 = -2$. D'autre part : $f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 4 = 2$. On observe que $f(-2)$ et $f(2)$ sont opposés : $f(-2) = -f(2)$. Donc à ce stade, on pourrait penser que f est impaire, mais il faudrait le prouver pour TOUS les nombres x. Donc on ne peut pas encore répondre.

   (b) *Calculer $f(1)$ et $f(-1)$. La fonction est-elle impaire ?*
   D'une part : $f(1) = 1^2 - 1 - 4 = -4$. D'autre part : $f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 4 = -2$. Donc $f(1)$ et $f(-1)$ ne sont pas opposés : $f(-1) \neq -f(1)$, donc la fonction n'est pas impaire.

2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 4$.*
   (a) *Montrer que f est paire.*

   Remarque

   Il faut montrer que la relation $f(x) = f(-x)$ est vraie pour TOUS les nombres x : quelques exemples ne suffiront pas.

   Soit x un nombre réel quelconque. Commençons par remarquer que :
   $$(-x)^2 = (-1 \times x)^2 = (-1)^2 \times x^2 = 1 \times x^2 = x^2$$
   Donc :
   $$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$$
   Donc pour tout nombre x, on a $f(x) = f(-x)$: la fonction f est paire.

   (b) *Montrer que f n'est pas impaire.*
   Prenons par exemple $x = 1$. Alors $f(1) = 1^2 + 4 = 5$, et $f(-1) = (-1)^2 + 4 = 5$: donc $-f(1) \neq f(-1)$. Donc la fonction n'est pas impaire.

   Remarque 1

   Pour que la fonction soit impaire, il aurait fallu que pour TOUT nombre x, on ait $f(x) = f(-x)$. Nous avons trouvé un contre-exemple (un exemple où ce n'est pas le cas), donc la fonction n'est pas impaire.

3. *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire.*
   Soit x un nombre réel non nul. Alors :
   $$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$
   Donc pour tout nombre x, on a $f(-x) = -f(x)$: la fonction est impaire.