3 Racines carrées

Définition

La racine carrée d'un nombre réel positif a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre positif $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$.

Exemple

Quelle est la racine carrée de 9 ?
Les nombres 3 et -3 pourraient convenir, car $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$. Mais puisque la racine carrée est positive, seul le premier nombre convient : $\boxed{\sqrt{9} = 3}$ car $3^2 = 9$ et $3 \geqslant 0$.

Propriété : Racines carrées

Pour tous nombres positifs a et b, on a :

1. $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$
2. $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.
3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
4. Si $b \neq 0$, alors : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
5. Si a et b sont strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Propriété : Racine carrée et Valeur absolue

Pour tout nombre a (positif ou négatif), on a :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sqrt{288} + \sqrt{50}$

$B = \sqrt{27} \times \sqrt{\frac{2}{6}}$

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{288} + \sqrt{50} \\
&= \sqrt{2^5 \times 3^2} + \sqrt{2 \times 5^2} \\
&= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2} + \sqrt{2 \times 5^2} \\
&= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} + \sqrt{2} \times \sqrt{5^2} \\
&= 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 + \sqrt{2} \times 5 \\
&= 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\
&= 17\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{27} \times \sqrt{\frac{2}{6}} \\
&= \sqrt{3^3} \times \sqrt{\frac{2}{2 \times 3}} \\
&= \sqrt{3^2 \times 3} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \\
&= 3 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= 3
\end{aligned}$$