2 Identités remarquables

Propriété : Identités remarquables

Pour tous nombres a et b, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\(a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Exemple

1. *Développer* $(2-3x)^2$.
   On reconnait l'identité remarquable $(a-b)^2$, avec $a=2$ et $b=3x$. Donc :
   $$\begin{aligned}(2-3x)^2 &= 2^2-2\times 2\times 3x+(3x)^2\\ &= 4-12x+3^2\times x^2\\ &= 4-12x+9x^2\\ &= 9x^2-12x+4\end{aligned}$$
2. *Factoriser* $4x^2-49$.
   Mettons d'abord en valeur les deux carrés : $49=7^2$ et $4x^2=2^2\times x^2=(2x)^2$. Nous pouvons maintenant factoriser en appliquant la troisième identité remarquable, avec $a=2x$ et $b=7$.
   $$\begin{aligned}4x^2-49 &= (2x)^2-7^2\\ &= (2x-7)(2x+7)\end{aligned}$$

Exemple

Résoudre l'équation : $49x^2-42x+9=0$. Vous ne savez pas (encore) résoudre ce genre d'équation directement. Par contre, vous pouvez factoriser cette expression.

Étape 1 : Factorisation On reconnait l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, avec $a=7x$ et $b=3$.

$$\begin{aligned}49x^2-42x+9&=0\\7^2x^2-2\times 3\times 7x+3^2&=0\\(7x)^2-2\times 3\times 7x+3^2&=0\\(7x-3)^2&=0\end{aligned}$$

Étape 2 : Résolution Nous pouvons maintenant résoudre l'équation. En effet, $(7x-3)^2=0$ si et seulement si $7x-3=0$:

$$\begin{aligned}49x^2-42x+9&=0\\(7x-3)^2&=0\\7x-3&=0\\7x&=3\\x&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

L'équation a donc une unique solution : $x=\frac{3}{7}$.