Exercice. *Une entreprise produit et commercialise entre 0 et 20 tonnes d'engrais par jour.*
Le bénéfice total, exprimé en centaines d'euros, réalisé pour la production de x tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 90$$

1. *Calculer le bénéfice réalisé lorsque l'entreprise produit et vend 13 tonnes d'engrais.*
   Le bénéfice est :
   $$B(13) = -2 \times 13^2 + 36 \times 13 - 90 = 40$$
   Donc le bénéfice est de 40 centaines d'euros, soit 40 000 euros.
2. (a) *Vérifier que 15 est une racine du polynôme $B(x)$.*
   $$B(15) = -2 \times 15^2 + 36 \times 15 - 90 = 0$$
   Donc 15 est bien une racine de B.

   (b) *En déduire l'autre racine de $B(x)$.*
   Le polynôme B est de la forme :
   $$a(x - x_1)(x - x_2)$$
   avec $a = -2$, x_1 est la première racine $x_1 = 15$, et x_2 est la seconde racine inconnue.
   D'une part, on a :
   $$B(0) = -2 \times 0^2 + 36 \times 0 - 90 = -90$$
   D'autre part :
   $$\begin{aligned} B(0) &= -2(0 - 15)(0 - x_2) \\ &= -2 \times (-15) \times (-x_2) \\ &= -30x_2 \end{aligned}$$
   Donc :
   $$\begin{aligned} -90 &= -30x_2 \\ \frac{-90}{-30} &= x_2 \\ 3 &= x_2 \end{aligned}$$
   La seconde racine est donc $x_2 = 3$.

   (c) *Factoriser $B(x)$.*
   Donc $B(x) = -2(x - 3)(x - 15)$.

3. (a) *Justifier que les coordonnées du sommet de la parabole de B sont* $(9, 72)$.

L'abscisse du sommet est :

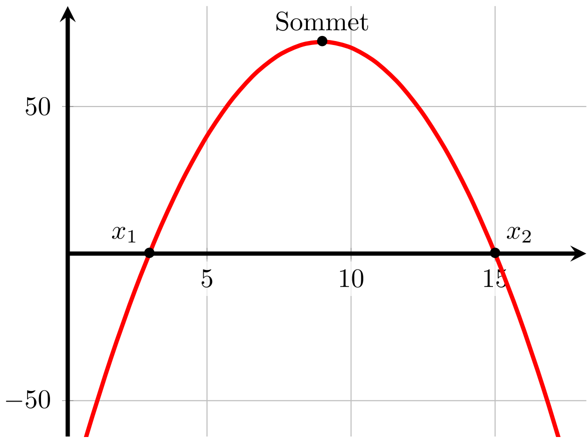
$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 15}{2} = 9$$

L'ordonnée du sommet est :

$$B(\alpha) = B(9) = -2 \times 9^2 + 36 \times 9 - 90 = 72$$

Donc les coordonnées du sommet sont $(9; 72)$.

(b) *Tracer l'allure de la courbe de B.* La courbe est une parabole (car c'est un polynôme du second degré). Nous connaissons les coordonnées du sommet $(9; 72)$, et nous savons que la courbe coupe l'axe des abscisses en les racines $x = 3$ et $x = 15$.



(c) *Dresser le tableau de signes de B.*

x	0		3		15		20
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. (a) *Résoudre l'inéquation $B(x) > 0$.*

D'après le tableau de signes, les solutions de $B(x) > 0$ sont $x \in]3; 15[$.

(b) *En déduire la quantité d'engrais, exprimée en tonnes, que l'entreprise doit produire et vendre pour faire un bénéfice.*

Pour que l'entreprise fasse un bénéfice, il faut que $B(x)$ soit positif, c'est-à-dire que $x \in]3; 15[$, c'est-à-dire que l'entreprise produise entre 3 et 15 tonnes d'engrais.

5. *Quelle quantité d'engrais faut-il vendre et produire pour obtenir un bénéfice maximal ? Justifier.*

Pour que le bénéfice soit maximal, il faut regarder le sommet sur la courbe de B. Cela correspond à $x = 9$, donc il faut produire 9 tonnes d'engrais pour que le bénéfice soit maximal.

Sujet D