Exercice 1 (D'après l'exercice 03 du sujet d'EC °17). *La glycémie est la concentration massique exprimée en gramme par litre* $\mathrm{g\,L^{-1}}$ *de sucre dans le sang. Le diabète se caractérise par une hyperglycémie chronique, c'est-à-dire un excès de sucre dans le sang et donc une glycémie trop élevée.*
Une glycémie est normale lorsqu'elle est comprise entre $0{,}7\,\mathrm{g\,L^{-1}}$ *et* $1{,}1\,\mathrm{g\,L^{-1}}$ *à jeun et lorsqu'elle est inférieure à* $1{,}4\,\mathrm{g\,L^{-1}}$*, une heure et trente minutes après un repas.*
Lorsque l'on suspecte un diabète, on pratique un test de tolérance au glucose. Lorsqu'il est à jeun, le patient ingère $75\,\mathrm{g}$ *de glucose au temps* $t = 0$ *(*t *est exprimé en heure).*
Pour tout réel t *de l'intervalle* $[0;3]$*, la glycémie du patient, exprimée en* $\mathrm{g\,L^{-1}}$*,* t *heures après l'ingestion, est modélisée par la fonction* f *définie sur* $[0;3]$ *par :*

$$f(t) = 0,3t^3 - 1,8t^2 + 2,7t + 0,8$$

1. *Que valait la glycémie du patient à jeun ?*
   Le patient est à jeun au début du test, c'est-à-dire à $t = 0$. Sa glycémie est alors :

   $$f(0) = 0,3 \times 0^3 - 1,8 \times 0^2 + 2,7 \times 0 + 0,8 = 0{,}8\,\mathrm{g\,L^{-1}}.$$

2. (a) *On note* f' *la fonction dérivée de la fonction* f *. Montrer que pour tout réel* t *appartenant à* $[0;3]$ *:*

   $$f'(t) = 0,9(t-1)(t-3)$$

   Commençons par dériver la fonction f :

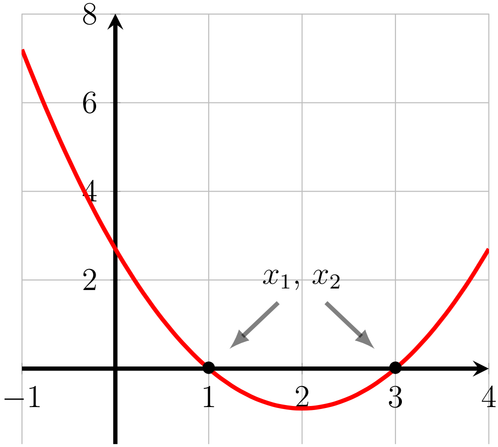
   $$\begin{aligned} f'(t) &= 0,3 \times 3t^2 - 1,8 \times 2t + 2,7 \times 1 + 0 \\ &= 0,9t^2 - 3,6t + 2,7 \end{aligned}$$

   Il faut maintenant factoriser cette expression, pour obtenir la forme demandée. Mais vous ne savez pas encore faire cela. Faisons donc l'inverse, et développons l'expression donnée.

$$
\begin{aligned}
0,9(t-1)(t-3) &= 0,9\left(t^2 - 1\times t - 3\times t + 3\right)\\
&= 0,9\left(t^2 - 4t + 3\right)\\
&= 0,9t^2 - 0,9\times 4t + 0,9\times 3\\
&= 0,9t^2 - 3,6t + 2,7\\
&= f'(t)
\end{aligned}
$$

(b) *Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0;3]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.*

La dérivée f' est un polynôme du second degré de la forme $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, avec $a=0,9$, $x_1=1$, et $x_2=3$. Puisque $a>0$, sa courbe est une parabole avec le sommet « en bas ». L'allure de sa courbe est donc la suivante.



Donc le tableau de signes de f' est le suivant.

t	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	2	↘	$0,8$	↗	

Les valeurs des extremums de f ont été calculées avec :

$$\begin{cases} f(1) = 0,3 \times 1^3 - 1,8 \times 1^2 + 2,7 \times 1 + 0,8 = 2 \\ f(2) = 0,3 \times 2^3 - 1,8 \times 2^2 + 2,7 \times 2 + 0,8 = 0,8 \end{cases}$$

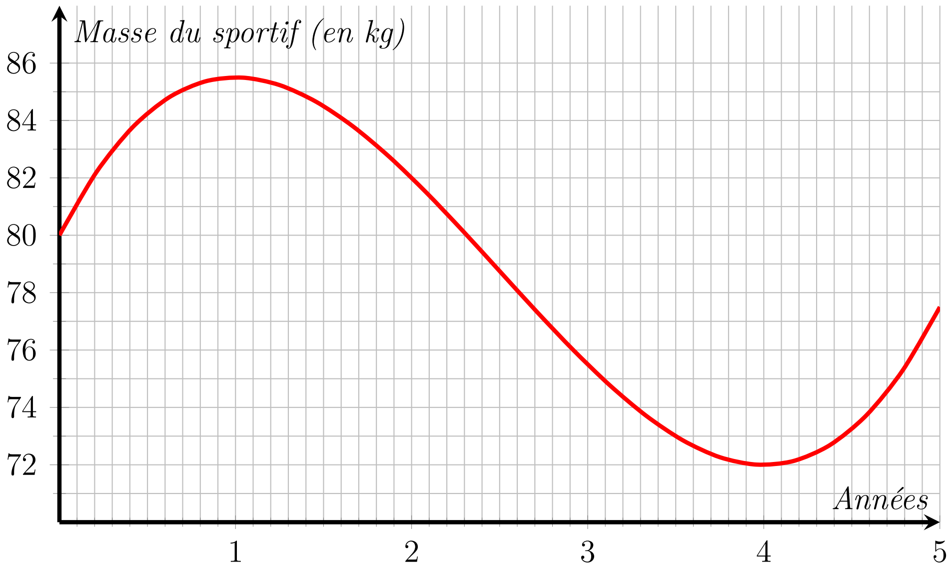
3. (a) *Au bout de combien d'heures la glycémie du patient est-elle maximale et que vaut- elle ?*
   On voit sur le tableau de variations de f que le maximum de f est atteint en $t = 1$, donc la glycémie est maximale au bout d'une heure, où elle atteint $f(1) = 2\,\mathrm{g\,L^{-1}}$.

   (b) *Peut-on suspecter un diabète chez le patient ? Expliquer.*
   L'énoncé dit qu'une glycémie « est normale lorsqu'elle est comprise entre $0{,}7\,\mathrm{g\,L^{-1}}$ et $1{,}1\,\mathrm{g\,L^{-1}}$ à jeun et lorsqu'elle est inférieure à $1{,}4\,\mathrm{g\,L^{-1}}$, une heure et trente minutes après un repas. »
   Nous avons montré que $f0) = 0,8$, donc la glycémie est normale à jeun. En revanche :

$$f(1,5) = 0,3 \times 1,5^3 - 1,8 \times 1,5^2 + 2,7 \times 1,5 + 0,8 = 1,8125$$

   donc au bout d'une heure et trente minutes, la glycémie est trop élevée.
   On peut donc suspecter un diabète chez le patient.

Exercice 2 (D'après l'exercice 4 du sujet d'EC °66)**.** *La courbe C tracée ci-dessous représente la masse, en kilogramme, d'un sportif en fonction du temps, exprimé en nombre d'années, sur une période de 5 ans.*



1. *Déterminer, sur la période étudiée, le nombre de mois pendant lesquels le sportif pèse plus de 85 kilogrammes. On répondra avec la précision permise par le graphique.*

On admet que la courbe C est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 12x + 80$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

2. *Déterminer $f'(x)$.*
3. *Montrer que $f'(x) = (x-1)(3x-12)$.*
4. (a) *Établir le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$.*
   (b) *En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;5]$.*
   (c) *Déterminer la masse minimale et la masse maximale du sportif sur la période étudiée.*