## 2 Fonction dérivée

**Définition.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est *dérivable* sur $I$ si elle est dérivable en tout nombre réel $a$ de $I$.
On définit alors la *fonction dérivée de* $f$, notée $f'$, qui à tout nombre $x$ de $I$, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de $f$ en $x$.

**Propriété** (Dérivée des fonctions usuelles)**.** Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

| Fonction | | Fonction dérivée |
|---|---|---|
| Fonction constante | $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ |
| Fonction identité | $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| Fonction carrée | $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ |
| Fonction cube | $f(x) = x^3$ | $f'(x) = 3x^2$ |

**Exemple 1.** On définit $f$ et $g$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Calculer les nombres suivants :

(a) $f(2) =$

(b) $f'(2) =$

(c) $g(4) =$

(d) $g'(4) =$

(e) $g(-1) =$

(f) $g'(-1) =$

**Propriété** (Opération sur les fonctions)**.** Soient $u$ et $v$ deux fonctions définie sur un intervalle $I$, et $k$ un nombre réel.

— La fonction définie par $f(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur $I$, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = k \times u'(x)$.

— La fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur $I$, et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

**Exemple 2.** Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5$
2. $g(x) = 4x$
3. $h(x) = -2x^3$
4. $k(x) = 5x - 1$
5. $l(x) = 4x^2 - 2x + 1$
6. $m(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 7$

**Exercice.**

— 54 à 57 p. 152 ; 62 à 67 p. 152

— 59 p. 152

— 27, 28 p. 149

# 3 Dérivée et Variations

**Propriété.** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$. Alors :

— si la fonction dérivée $f'$ est strictement positive, alors la fonction $f$ est croissante ;

— si la fonction dérivée $f'$ est strictement négative, alors la fonction $f$ est décroissante.

**Exemple 3.** Soit $f$ une fonction. On connait le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | | | | | | | | |

**Exemple 4** (❤️)**.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

1. Déterminer l'expression de $f'$.
2. Dresser le tableau de signes de $f'$.
3. En déduire le tableau de variations de $f$.
4. Quels sont les extremums de $f$ ?

**Exemple 5** (❤️)**.** On définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 3(x+3)(x-1)$.
2. Dresser le tableau de signes de $g'$.
3. En déduire le tableau de variations de $g$.
4. Quels sont les extremums de $g$ ?

**Exercice.**

— Exercices 80, 85 p. 153.

— Problèmes 93, 94 p. 154.