

2 Fonction dérivée

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est *dérivable* sur I si elle est dérivable en tout nombre réel a de I .

On définit alors la *fonction dérivée de f* , notée f' , qui à tout nombre x de I , associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x .

Propriété (Dérivée des fonctions usuelles). Toutes les fonctions décrites ici sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Fonction	Fonction dérivée
Fonction constante $f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Fonction identité $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carrée $f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple 1. On définit f et g par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Calculer les nombres suivants :

- | | | |
|---------------|---------------|----------------|
| (a) $f(2) =$ | (c) $g(4) =$ | (e) $g(-1) =$ |
| (b) $f'(2) =$ | (d) $g'(4) =$ | (f) $g'(-1) =$ |

Propriété (Opération sur les fonctions). Soient u et v deux fonctions définie sur un intervalle I , et k un nombre réel.

- La fonction définie par $f(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I , et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = k \times u'(x)$.
- La fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I , et pour tout nombre $x \in I$, on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple 2. Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes.

- | | |
|-------------------|----------------------------------|
| 1. $f(x) = 5$ | 4. $k(x) = 5x - 1$ |
| 2. $g(x) = 4x$ | 5. $l(x) = 4x^2 - 2x + 1$ |
| 3. $h(x) = -2x^3$ | 6. $m(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 7$ |

Exercice.

- 54 à 57 p. 152; 62 à 67 p. 152
- 59 p. 152
- 27, 28 p. 149

3 Dérivée et Variations

Propriété. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Alors :

- si la fonction dérivée f' est strictement positive, alors la fonction f est croissante ;
- si la fonction dérivée f' est strictement négative, alors la fonction f est décroissante.

Exemple 3. Soit f une fonction. On connaît le tableau de signes de la dérivée, donné dans le tableau suivant. Compléter le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-2	1	5	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$
f					

Exemple 4 (♥). On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

1. Déterminer l'expression de f' .
2. Dresser le tableau de signes de f' .
3. En déduire le tableau de variations de f .
4. Quels sont les extremums de f ?

Exemple 5 (♥). On définit la fonction g sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 3(x+3)(x-1)$.
2. Dresser le tableau de signes de g' .
3. En déduire le tableau de variations de g .

4. Quels sont les extremums de g ?

Exercice.

- Exercices 80, 85 p. 153.
- Problèmes 93, 94 p. 154.