(a) Définition

Définition. Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + b$ (avec a et b des nombres réels, et $a \neq 0$) et $x \mapsto a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ (avec a, x_1, x_2 des nombres réels, et $a \neq 0$) sont des *polynômes du second degré*.

Exemple 1. Identifier les nombres a, b, x_1 ou x_2 dans les polynômes suivants.

$f(x) = 4x^2 + 7$	$g(x) = -x^2 - 12$	$h(x) = -7x^2 + 2$
$k(x) = 7(x-2)(x-8)$	$l(x) = -2(x-5)(x+2)$	$m(x) = 8(x+1)(x-7)$
$n(x) = (x-\pi)(x+\sqrt{2})$	$p(x) = x^2$	$q(x) = 2x(x+1)$

Remarque. Il existe d'autres polynômes du second degré d'une forme différente, mais elles ne sont pas étudiées dans ce chapitre.

(b) Représentation graphique

Propriété (Représentation graphique)**.** La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* :

1. si $a < 0$, la fonction est d'abord croissante puis décroissante, et admet un maximum ;
2. si $a > 0$, la fonction est d'abord décroissante puis croissante, et admet un minimum.

Propriété (Sommet)**.**

1. Un polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + b$ a pour sommet $S(0; b)$.
2. Un polynôme de la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ a pour sommet $S(\alpha; \beta)$, avec $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ (où α est l'abscisse de son sommet).

Exemple 2. On donne les polynômes du second degré définis sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = -(x-1)(x+2)$, et $h(x) = -x^2$.

1. Identifier les nombres a, b, x_1 ou x_2 dans ces trois expressions.
2. Dans un repère, placer le sommet de chacune des fonctions, puis tracer son allure.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions des équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, et $h(x) = 0$.

Exercice. Exercices 21 p. 120 ; 22, 26, 28, 29 p. 121.

(c) Racines

Propriété (Racines)**.** Soit un polynôme du second degré de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, qui sont appelées *racines du polynôme*, et sont égales à x_1 et x_2.
Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'une racine appelée *racine double*.

Exemple 3.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x-4)(x+2)$.
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Déterminer les coordonnées du sommet.
   (c) Placer le sommet et les racines dans un repère, et tracer l'allure de la courbe.
   (d) Par lecture graphique, dresser les tableaux de signes et de variations de f.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^2 + 1$.
   (a) Résoudre $f(x) = 0$. (b) Dresser les tableaux de signes et de variations de f.

Exercice. 62, 63, 65, 66 p. 125

(d) Variations

Propriété (Tableau de variations)**.**

— Si f est de la forme : $f(x) = ax^2 + b$:

Si $a < 0$ **:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	b	$\searrow$	

Si $a > 0$ **:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	b	$\nearrow$	

— Si f est de la forme : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

Si $a < 0$ **:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

Si $a > 0$ **:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Exemple 4. On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -4x^2 - 1$ et $g(x) = 2(x-4)(x+1)$. Pour chacune des deux fonctions :

1. Dresser son tableau de variations.
2. Déterminer la valeur de ses extremums.

Exercice. 87, 88 p. 125

(e) Factorisation

Propriété. Soit un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, ayant deux racines. Sa forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont ses racines.

Exemple 5 (❤️)**.** On considère le polynôme f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 3x - 60$. On cherche la forme factorisée de f.

1. Vérifier que 4 est bien une racine de f.
2. Dans l'expression $a(x - x_1)(x - x_2)$, remplacer a et x_1 par leur valeur.
3. Exprimer $f(0)$ de deux manières différentes.
4. En déduire la valeur de x_2, et conclure en donnant la forme factorisée de f.

Exercice (Problèmes)**.** 70, 78 p. 124.