

Exercice. *Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :*

$$\frac{x^2 + 3}{x + 1} \geq 2$$

On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (tous les nombres réels sauf -1) la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

1. *Montrer que pour tout x de son domaine de définition, on a :*

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

On note $u(x) = x^2 + 3$ le numérateur de la fraction, et $v(x) = x + 1$ son dénominateur. Alors $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 1$, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \times (x + 1) - 1 \times (x^2 + 3)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

2. *Montrer que le tableau de signes de f' est :* Puisque le dénominateur de $f'(x)$ est un carré, il est toujours positif. Donc étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier le signe de son numérateur $x^2 + 2x - 3$, qui est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. Ce discriminant est strictement positif, donc le polynôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 1$$

De plus, puisque le coefficient du x^2 est positif, la fonction polynôme est décroissante puis croissante, donc nous obtenons le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

3. En déduire le tableau de variations de f (ne pas oublier de calculer les valeurs des éventuels extremums).

À la calculatrice, nous obtenons $f(-3) = -6$ et $f(1) = 2$, ce qui donne le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f'	\swarrow -6 \searrow			\swarrow 2 \searrow		

4. En déduire les solutions de l'inéquation de départ.

D'après le tableau de variations, pour $x < -1$, le maximum de f est -6 , donc l'équation $f(x) \geq 2$ n'a pas de solutions sur cet intervalle. En revanche, pour $x > -1$, le minimum de f est 2 , donc tous les nombres sont solutions sur cet intervalle.

Les solutions de $f(x) \geq 2$ sont donc $x > -1$.