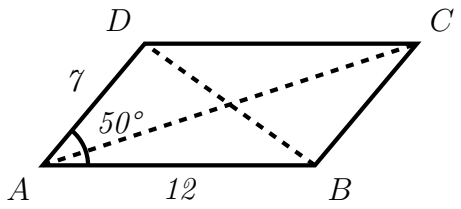
Exercice 1. *On considère un parallélogramme $ABCD$, tel que $AB = 12$, $AD = 7$, et $\widehat{BAD} = 50°$ (la figure de droite n'est pas à l'échelle).*
Le but de l'exercice est de déterminer la longueur AC.



1. *En utilisant une expression appropriée du produit scalaire, calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.*
   On utilise l'expression avec le cosinus.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= AB \times AD \times \cos\widehat{BAD}\\ &= 12 \times 7 \times \cos 50°\\ &= 84\cos 50°\end{aligned}$$

2. Une nouvelle expression du produit scalaire. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques.*
   (a) *On rappelle que $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$. Montrer que :*

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2\\ &= \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$.*
   Isolons le produit scalaire dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2\\ \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 &= 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\\ \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

3. *En utilisant l'expression du produit scalaire introduite dans cet exercice, montrer que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$.
Commençons par remarquer que puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - AB^2 - AD^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - 12^2 - 7^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - 193\right)\\
&= \frac{AC^2}{2} - 96,5
\end{aligned}$$

4. *En déduire la valeur exacte de la longueur* AC*, puis une valeur approchée arrondie au dixième.*
Nous avons montré dans les questions précédentes que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 84\cos 50°$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{AC^2}{2} - 96,5 &= 84\cos 50°\\
\frac{AC^2}{2} &= 84\cos 50° + 96,5\\
AC^2 &= 168\cos 50° + 193\\
AC &= \sqrt{168\cos 50° + 193}
\end{aligned}$$

Nous avons exclu la solution négative $AC = -\sqrt{\cdots}$ car AC est une longueur, donc positive. Ainsi :

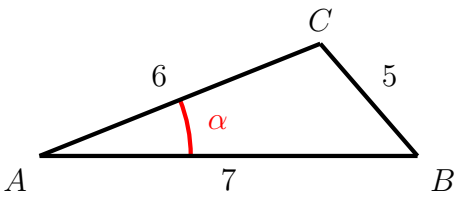
$$AC \approx 17,3$$

Exercice 2. *Soient* $A\,(1;2)$ *et* $B\,(-2;3)$ *deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé. On souhaite placer un troisième point sur la diagonale d'équation* $y = x$*, de telle sorte que le triangle* ABC *soit rectangle en* A*.*

1. *Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.*
   Le triangle ABC est rectangle donc le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est nul : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
2. *Justifier que les coordonnées de C sont $(x; x)$, pour une certaine valeur de x qui sera déterminée par la suite.*
   Puisque C est sur la diagonale d'équation $y = x$, alors ses coordonnées sont égales : $C(x; x)$.
3. *Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2x + 1$.*
   On a :
   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x-2 \end{pmatrix}$$
   Donc :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= -3(x-1) + 1(x-2) \\ &= -3x + 3 + x - 2 \\ &= -2x + 1 \end{aligned}$$
4. *En déduire coordonnées possibles pour C telles que le triangle ABC soit rectangle en A.*
   D'après la première question, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est nul. D'après la question précédente, ce même produit scalaire est égal à $-2x + 1$. Donc :
   $$\begin{aligned} -2x + 1 &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$
   Il n'y a donc qu'une unique solution : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les coordonnées de C sont $C(0,5; 0,5)$.

Exercice 3. *On considère un triangle de côtés de longueurs 5, 6 et 7. Déterminer une valeur approchée de l'angle opposé au plus petit côté, arrondi au dixième de degré près.*

Nommons ce triangle ABC, avec les longueurs décrites dans la figure suivante, qui n'est pas à l'échelle.

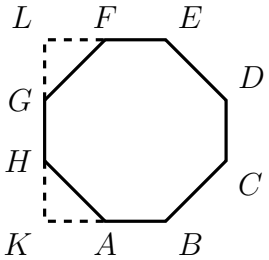


Appliquons le théorème d'Al Kashi.

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\alpha \\
5^2 &= 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \times \cos\alpha \\
25 &= 85 - 84\cos\alpha \\
-60 &= -84\cos\alpha \\
\frac{60}{84} &= \cos\alpha \\
\frac{5}{7} &= \cos\alpha
\end{aligned}$$

Donc $\alpha = \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \approx 44{,}4°$.

Exercice 4. *On considère l'octogone non-régulier suivant, ainsi que les points K et L, points d'intersection des droites (GH) et (AB) d'une part, et (EF) et (GH) d'autre part. On a les relations suivantes :*



Longueurs : $AH = BC = DE = FG$; $AB = GH = EF = CD = AK = KH = GL = LF = 1$.
Parallélisme : $(AB) // (EF)$, $(CD) // (GH)$, $(BC) // (FG)$, $(DE // AH)$.
Perpendicularité : $(AB) \perp (GH)$.

L'objet de l'exercice est de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AB}$ de trois manières différentes.

1. *Méthode 1 : Projeté orthogonal*

(a) *Quel est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{HE}$ sur la droite (AB) ?*
Le projeté orthogonal de H sur (AB) est K, et celui de E sur (AB) est B. Donc le projeté orthogonal de $\overrightarrow{HE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{KB}$.

(b) *En déduire $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AB}$.*
D'après la question précédente, $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{AB}$. Or ces deux vecteurs sont colinéaires et dans le même sens, donc $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{AB} = KB \times AB = 2 \times 1 = 2$.

2. *Méthode 2 : Décomposition*

(a) *À l'aide de la relation de Chasles, décomposer le vecteur $\overrightarrow{GE}$ en passant par le point L.*
$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LE}$

(b) *En utilisant cette décomposition, calculer $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AB}$.*

$$\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LE}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GL}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{LE}.\overrightarrow{AB}$$

Or les droites (GL) et (AB) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{GL}.\overrightarrow{AB} = 0$, et les vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et dans le même sens, donc $\overrightarrow{LE}.\overrightarrow{AB} = LE \times AB = 2 \times 1 = 2$.

3. *Méthode 3 : Coordonnées*
Définir un repère pertinent, déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HE}$ dans ce repère, et en déduire la valeur de $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{AB}$.
On utilise le repère (K, A, H), qui est orthonormé (car $(KA) \perp (KH)$ et $KA = KH = 1$). Dans ce repère, on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, donc :

$$\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{GE}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{GE}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 2 \times 1 + 1 \times 0 = 2$$