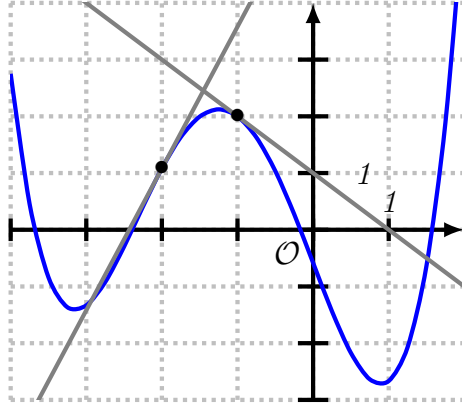


Exercice 1 (★). On considère la fonction f , dont voici la représentation graphique. On a également tracé deux tangentes, au points d'abscisses -2 et -1 .



- Donner une valeur approchée des nombres suivants, par lecture graphique : (a) $f(-2) = 1$ (b) $f'(-2) \approx 2,5$ (c) $f(-1) = 2$ (d) $f'(-1) = -1$.
- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de f en $x = -2$.
L'équation réduite est donnée par la formule : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec : $a = -2$, $f(a) = f(-2) = 1$, $f'(a) = f'(-2) = 2,5$. Donc l'équation est :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ y &= 2,5(x - (-2)) + 1 \\ y &= 2,5x + 5 + 1 \\ y &= 2,5x + 6 \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

On se demande combien la courbe de cette fonction admet de tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

On rappelle qu'une droite est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur est égal à 0.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \times 2x + 5 - 0 \\ &= 3x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

2. Résoudre $f'(x) = 0$.

La fonction f' est un polynôme du second degré de paramètres $a = 3$, $b = -6$, $c = 5$, et de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -24$.

Donc $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solutions. La fonction f' est un polynôme du second degré de paramètres $a = 3$, $b = -6$, $c = 5$, et de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -24$.

Donc $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solutions.

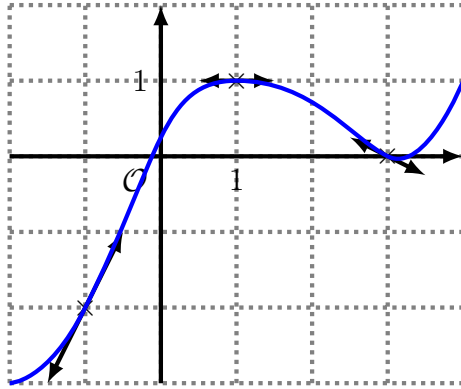
3. En déduire la réponse au problème posé.

Puisque l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solutions, alors aucune tangente à la courbe de f n'a son coefficient directeur égal à 0, donc aucune tangente à la courbe de f n'est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 3 (★). On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} , dont on connaît le tableau de valeurs suivant.

x	-1	1	3
$f(x)$	-2	1	0
$f'(x)$	2	0	$-0,5$

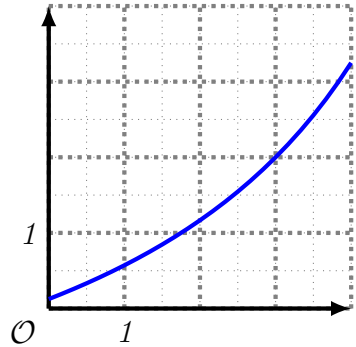
0. Tracer sur votre copie un repère orthonormé allant de -2 à 4 en abscisses, et de -5 à 5 en ordonnées.
1. Placer sur ce graphique les trois points connus de la courbe de f , ainsi que les tangentes en ces points.
2. Tracer une courbe compatible avec ce tableau.



Exercice 4.

Dans cet exercice, toutes les mesures sont données en mètres.

Travaillant le bureau d'étude d'un parc aquatique, on vous demande d'étudier si un toboggan est dangereux ou non. Tous les critères sont vérifiés, sauf le dernier qui reste à valider :



Un toboggan est dangereux si sa pente maximale est supérieure à 200 % (soit un coefficient directeur supérieur à 2).

La courbe du toboggan, représenté dans le graphique ci-dessus, est donné par la fonction f , définie sur $[2; 4]$ par :

$$f : x \mapsto \frac{3x + 1}{8 - x}$$

1. On admet que la fonction f est dérivable. Montrer que pour tout $x \in [2; 4]$, on a : $f'(x) = \frac{25}{(8-x)^2}$.

On note u et v les fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} , d'expressions respectives $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 8 - x$. On a alors $u'(x) = 3$, $v'(x) = -1$, et puisque $f = \frac{u}{v}$, alors $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{3(8-x) - (3x+1) \times (-1)}{(8-x)^2} \\
 &= \frac{24 - 3x + 3x + 1}{(8-x)^2} \\
 &= \frac{25}{(8-x)^2}
 \end{aligned}$$

2. Montrer que $f'(x) \geq 2$ est équivalent à : $-2x^2 + 32x - 103 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\geq 2 \\
 \frac{25}{(8-x)^2} &\geq 2 \\
 \frac{25}{(8-x)^2} - 2 &\geq 0 \\
 \frac{25}{(8-x)^2} - \frac{2(8-x)^2}{(8-x)^2} &\geq 0 \\
 \frac{25 - 2(8-x)^2}{(8-x)^2} &\geq 0 \\
 \frac{25 - 2(64 - 16x + x^2)}{(8-x)^2} &\geq 0 \\
 \frac{25 - 128 + 32x - 2x^2}{(8-x)^2} &\geq 0 \\
 \frac{-2x^2 + 32x - 103}{(8-x)^2} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Or le dénominateur $(8-x)^2$ est un carré, donc toujours positif, donc le signe de $\frac{-2x^2+32x-103}{(8-x)^2}$ est le même que celui du numérateur $-2x^2 + 32x - 103$. Donc :

$$f'(x) \geq 2 \iff -2x^2 + 32x - 103 \geq 0$$

3. Dresser le tableau de signes du trinôme $-2x^2 + 32x - 103$ sur $[2; 4]$.
 On pourra, si nécessaire, arrondir les valeurs numériques au dixième.
 C'est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 32^2 - 4 \times (-2) \times (-103) = 200$. Il y a donc deux racines :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{-32 - \sqrt{200}}{2 \times (-2)} = \frac{-2 \times 16 - 10 \times \sqrt{2}}{2 \times (-2)} = \frac{16 + 5\sqrt{2}}{2} \approx 11,5 \\ x_2 &= \frac{-32 + \sqrt{200}}{2 \times (-2)} = \frac{-2 \times 16 + 10 \times \sqrt{2}}{2 \times (-2)} = \frac{16 - 5\sqrt{2}}{2} \approx 4,5 \end{cases}$$

Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$	$4,5$	$11,5$	$+\infty$	
$-2x^2 + 32x - 103$	-	0	+	0	-

4. Répondre au problème : ce toboggan est-il dangereux ?

Le toboggan est dangereux, si la pente maximale est supérieure à 200%, c'est-à-dire s'il existe une valeur de x telle que $f'(x) \geq 2$ (d'après l'énoncé), c'est-à-dire si $-2x^2 + 32x - 103 \geq 0$ (d'après la question ??), c'est-à-dire si $x \in [4, 5; 11, 5]$ (d'après la question ??).

Or la fonction n'est étudiée que sur l'intervalle $[2; 4]$, donc sur cet intervalle, $f'(x) < 2$, et le toboggan n'est pas dangereux.