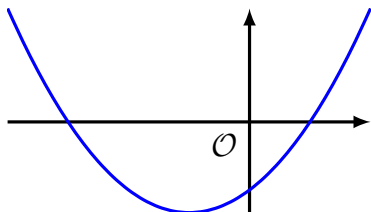


Exercice 1. On considère un polynôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (où a, b, c sont des nombres réels inconnus), représenté par la courbe suivante.

Répondre aux questions suivantes en justifiant par lecture graphique.



1. *Quel est le signe du discriminant Δ ?*

Puisque la parabole a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses, la fonction a deux racines, donc le discriminant est strictement positif.

2. *Le polynôme se factorise-t-il ?*

Puisque le discriminant est strictement positif, le polynôme se factorise.

3. *Quel est le signe de a ?*

Puisque la fonction polynôme du second degré est décroissante puis croissante, alors $a > 0$.

4. *Quel est le signe de c ?*

Puisque l'intersection entre la courbe et l'axe des ordonnées est située sous l'axe des abscisses, alors $c < 0$.

5. *Quel est le signe de b ?*

Puisque l'abscisse du sommet est négative, alors $-\frac{b}{2a} < 0$, donc $\frac{b}{a} > 0$.
Or $a > 0$, donc $b > 0$.

Exercice 2. On cherche à trouver un nombre entier positif n tel que la somme des nombres entiers de 1 à n soit égal à 903. En d'autres termes :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 903$$

1. *Montrer que $n^2 + n - 1806 = 0$.*

La somme des nombres entiers de 1 à n est donnée par la formule $\frac{n(n+1)}{2}$.

Donc :

$$\frac{n(n+1)}{2} = 903$$

$$n(n+1) = 1806$$

$$n^2 + n - 1806 = 0$$

2. *Résoudre cette équation.*

C'est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1806) = 7225$. Il y a donc deux racines :

$$\begin{cases} n_1 = \frac{-1 - \sqrt{7225}}{2 \times 1} = -43 \\ n_2 = \frac{-1 + \sqrt{7225}}{2 \times 1} = 42 \end{cases}$$

3. *En déduire les solutions au problème posé.* Nous recherchons des nombres entiers *positifs*, donc nous excluons la solution négative. Ne reste que $n = 42$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 42 = 903$$

Exercice 3. *L'objet de l'exercice est de factoriser la fonction f , définie sur \mathbb{R} , par :*

$$f(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$$

1. *Montrer que 1 est racine de la fonction.*

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 17 \times 1 + 15 = 0$$

Le nombre 1 est donc une racine de la fonction (car $f(1) = 0$).

En faisant une division de polynômes (c'est plus simple que ça en a l'air), on obtient :

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 15).$$

2. *Factoriser le polynôme $x^2 + 2x - 15$.*

C'est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$. Il y a donc deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 1} = -5 \\ x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 1} = 3 \end{cases}$$

Donc le polynôme se factorise en $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$.

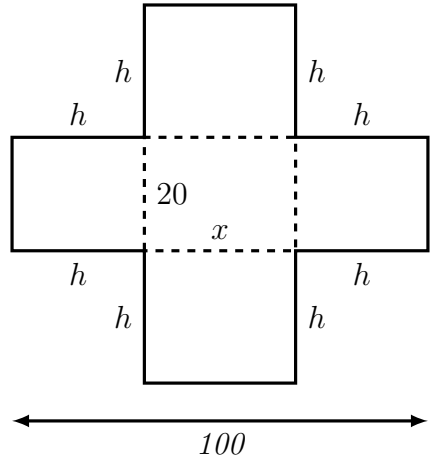
3. *En déduire la forme factorisée du polynôme du troisième degré*

$$x^3 + x^2 - 17x + 15$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 17x + 15 \\ &= (x - 1)(x^2 + 2x - 15) \\ &= (x - 1)(x - 3)(x + 5) \end{aligned}$$

Exercice 4.

On souhaite réaliser une boîte, de la forme d'un pavé droit, sans couvercle. Le plus petit des deux côtés de la base mesure 20 cm, et les autres côtés doivent être aussi grands que possibles pour que le patron puisse tenir sur une feuille carrée de 1 m de côté au maximum (soit 100 cm). On appelle x la longueur, en centimètres, du côté inconnu de la base. Le patron est représenté dans la figure ci-contre.



On admet que x est un nombre réel compris entre 20 et 100, et on note V la fonction qui à x associe le volume de la boîte.

1. Montrer que le volume de la boîte V est donné par la formule

$$V(x) = -10x^2 + 1000x.$$

Les dimensions de la base sont, en centimètres, 2 et x . Puisque le patron doit faire moins de 100 cm, alors la hauteur h (visible en rouge sur le patron) vérifie : $h + x + h = 100$, soit $h = -\frac{x}{2} + 50$. Donc le volume est :

$$V(x) = 20 \times x \times \left(-\frac{x}{2} + 50\right) = -10x^2 + 1000$$

2. Quel est le volume maximal de la boîte ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ? Justifier.

Le volume V est un polynôme du second degré de paramètres $a = -10$, $b = 1000$ et $c = 0$. L'abscisse de son sommet est donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2 \times (-10)} = 50$, et l'ordonnée est $V(50) = -10 \times 50^2 + 1000 \times 50 = 25000$.

x	20	50	100
V		25 000	

Le volume maximal est donc $25\,000\text{ cm}^3$, atteint avec $x = 50$.

3. On souhaite que la boîte ait un volume d'au moins $20\,000\text{ cm}^3$.

(a) Montrer que « Le volume est supérieur à $20\,000\text{ cm}^3$ » est équivalent à l'inéquation

$$-10x^2 + 1000x - 20\,000 \geq 0.$$

$$V(x) \geq 20\,000$$

$$-10x^2 + 1000x \geq 20\,000$$

$$-10x^2 + 1000x - 20\,000 \geq 0$$

(b) Dresser le tableau de signes de la fonction suivante, en arrondissant les éventuelles racines au centimètre près :

$$x \mapsto -10x^2 + 1000x - 20\,000.$$

C'est un polynôme du second degré de discriminants $\Delta = 1000^2 - 4 \times (-10) \times (-20\,000) = 200\,000$. Il y a donc deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1000 - \sqrt{200\,000}}{2 \times (-10)} \approx 28 \\ x_2 = \frac{-1000 + \sqrt{200\,000}}{2 \times (-10)} \approx 72 \end{cases}$$

x	20	28	72	100	
$-10x^2 + 1000x - 20\,000$	-	0	+	0	-

(c) En déduire les valeurs possibles de x pour que le volume soit supérieur ou égal à $20\,000\text{ cm}^3$.

D'après le tableau de signes précédent, les solutions sont $x \in [28; 72]$. Donc la boîte aura un volume supérieur à $20\,000\text{ cm}^3$ si le plus grand côté de la base est compris entre 28 cm et 72 cm.