Exercice 1. *On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f : x \mapsto 2x^2 - 2x + 1 \\ g : x \mapsto x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

On cherche à déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection des courbes des deux fonctions.
Soit $M(x; y)$ un point d'intersection des deux courbes.

1. *Justifier que : $f(x) = g(x)$.*
   Puisque M est un point de la courbe de f, alors $y = f(x)$. De même, puisque M est sur la courbe de g, alors $y = g(x)$. Donc $f(x) = g(x)$.
2. *En déduire que : $x^2 - 6x + 2 = 0$.*
   Puisque $f(x) = g(x)$, alors :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 1 &= x^2 + 4x - 1 \\ 2x^2 - x^2 - 2x - 4x + 1 + 1 &= 0 \\ x^2 - 6x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

3. *Résoudre l'équation précédente.*
   L'expression $x^2 - 6x + 2$ est un polynôme du second degré, avec $a = 1$, $b = -6$, et $c = 2$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 28$. Le discriminant étant strictement positif, il y a deux racines :
   - $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{28}}{2\times 1} = 3 - \sqrt{7}$.
   - $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{28}}{2\times 1} = 3 + \sqrt{7}$.
4. *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux courbes ?*

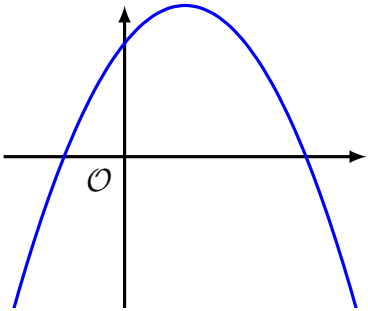
   Premier cas : $x = 3 - \sqrt{7}$ Alors, puisque le point M est sur la courbe de f, son ordonnée est $f\left(3 - \sqrt{7}\right) = 2 \times \left(3 - \sqrt{7}\right)^2 - 2 \times \left(3 - \sqrt{7}\right) + 1 = 27 - 10\sqrt{7}$.

   Deuxième cas : $x = 3 + \sqrt{7}$ Alors, puisque le point M est sur la courbe de f, son ordonnée est $f\left(3 + \sqrt{7}\right) = 2 \times \left(3 + \sqrt{7}\right)^2 - 2 \times \left(3 + \sqrt{7}\right) + 1 = 27 + 10\sqrt{7}$.

   Les deux courbes ont donc deux points d'intersections :

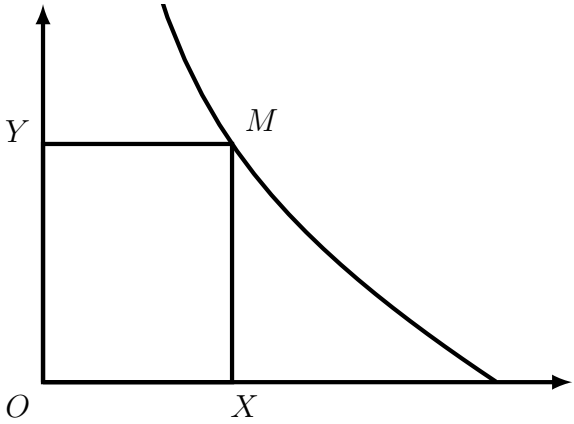
$$M_1 \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ 27 - 10\sqrt{7} \end{pmatrix} \text{ et } M_2 \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} \\ 27 + 10\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *On considère un polynôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (où a, b, c sont des nombres inconnus), représenté par la courbe suivante.*
Répondre aux questions suivantes en justifiant par lecture graphique.



1. *Quel est le signe du discriminant Δ ?*
   Puisque la courbe a deux points d'intersection avec l'axe des absisses, alors le polynôme a deux racines, et le discriminant est strictement positif.
2. *Le polynôme se factorise-t-il ?*
   Puisque le discriminant est strictement positif, alors le polynôme se factorise.
3. *Quel est le signe de a ?*
   Vu « l'orientation » de la parabole, a est strictement négatif.
4. *Quel est le signe de c ?*
   Le nombre c est l'ordonnée du point d'intersection entre la courbe et l'axe des ordonnée. Ce point est au dessus de l'axe des abscisses, donc $c > 0$.

Exercice 3. *On considère la courbe de la fonction f définie sur $]0;6]$ par $f : x \mapsto \frac{-x^2+4x+12}{2x}$. Le point M est un point de la courbe, et on construit le rectangle $OXMY$ de telle sorte que X et Y soient sur les axes des abscisses et des ordonnées, respectivement. La situation est illustrée sur la figure suivante.*



Soit M un point de la courbe de f d'abscisse x (pour $x \in]0;6]$). On appelle $A(x)$ l'aire du rectangle $OXYM$ en fonction de x.

1. *Préciser les coordonnées de M, puis en déduire que*

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 6.$$

Puisque M est sur la courbe de f, alors ses coordonnées vérifient $y = f(x) = \frac{-x^2+4x+12}{2x}$. Donc ses coordonnées sont $\left(x; \frac{-x^2+4x+12}{2x}\right)$.
Les dimensions du rectangle sont donc $OX = x$ et $OY = \frac{-x^2+4x+12}{2x}$, donc l'aire du rectangle est :

$$\begin{aligned} A(x) &= OX \times OY \\ &= x \times \frac{-x^2+4x+12}{2x} \\ &= \frac{-x^2+4x+12}{2} \\ &= -\frac{x^2}{2} + 2x + 6 \end{aligned}$$

2. *On cherche à connaître la position de M pour que le rectangle soit le plus grand possible.*

   (a) *Dresser le tableau de variations de A sur l'intervalle $]0;6]$.*
   A est un polynôme du second degré avec $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 6$. Donc l'abscisse du sommet est $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$, et

l'ordonnée est $\beta = A(\alpha) = A(2) = -\frac{2^2}{2} + 2 \times 2 + 6 = 8$. Puisque $a < 0$, les variations sont :

x	0		2		6
A	‖	↗	8	↘	

(b) *En déduire les dimensions du rectangle pour qu'il ait la plus grande aire possible. Combien vaut alors cette aire ?*
Pour que le triangle ait la plus grande aire possible, il faut que $x = 2$, et donc $y = f(2) = 4$. L'aire est alors $A(2) = 8$.

3. *On cherche à connaître les positions de M donnant une aire supérieure à 3,5.*

(a) *Montrer que l'inéquation $A(x) \geqslant 3,5$ est équivalente à $-x^2+4x+5 \geqslant 0$.*

$$\begin{aligned} A(x) &\geqslant 3,5 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x + 6 &\geqslant 3,5 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x + 6 - 3,5 &\geqslant 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x + 2,5 &\geqslant 0 \\ -x^2 + 4x + 5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Remarquons que la dernière étape (multiplication par deux) n'est pas nécessaire, mais nous permet de nous débarasser de la fraction.

(b) *Dresser le tableau de signes du polynôme $-x^2 + 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$.*
Le polynôme $-x^2 + 4x + 5$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 36$. Il est strictement positif, donc il a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = 5 \\ x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(c) *En déduire les abscisses possibles de M pour l'aire du rectangle soit supérieure à $3,5$.* Attention : On rappelle que l'abscisse de M est comprise dans l'intervalle $]0;6]$.
D'après la question 3a, $A(x) \geqslant 3,5$ si et seulement si $-x^2+4x+5 \geqslant 0$, c'est-à-dire si (d'après le tableau de signes précédent) $x \in [-1;5]$. Or la fonction n'était définie que sur l'intervalle $]0;6]$, donc on restraint les solutions à cet intervalle, ce qui donne :

$$x \in]0;5]$$