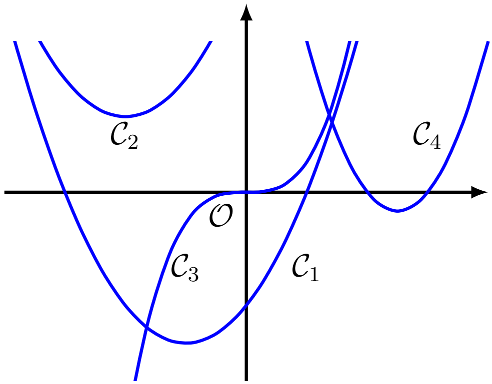
Exercice 1. *La fonction f est un trinôme du second degré, dont on connait les trois formes suivantes (pour tout $x \in \mathbb{R}$) :*



- $f(x) = 2(x+3)(x-1)$
- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$

On a tracé quatre courbes sur le graphique, dont l'échelle est inconnue. En justifiant, sans la calculatrice, *déterminer laquelle des courbes est celle de f.*

La fonction étant un polynôme du second degré, sa courbe est une parabole, et la courbe $\mathcal{C}_3$ est exclue.

— *Méthode 1 : Forme développée* $f(0) = 2\times 0^2 + 4\times 0 - 6 = -6$, donc l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées est situées sous l'axe des abscisses. Donc seule la courbe $\mathcal{C}_1$ convient.

— *Méthode 2 : Forme factorisée* D'après la forme canonique $f(x) = 2(x+3)(x-1) = 2(x-(-3))(x-1)$, les racines sont -3 et 1. Or les racines correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. La courbe $\mathcal{C}_1$ est la seule a avoir une interesction à gauche (racine négative) et une à droite (racine positive) de l'axe des ordonnées.

— *Méthode 3 : Forme canonique* D'après la forme canonique $f(x) = 2(x+1)^2 - 8 = 2(x-(-1))^2 - 8$, les coordonnées du sommet de la parabole sont $(-1; -8)$, soit à gauche de l'axe des ordonnées, et sous l'axe des abscisses. Seule la courbe $\mathcal{C}_1$ convient.

Exercice 2. *On admet que $3 < \pi$.*

1. *Sans aucun calcul, justifier que $\frac{1}{3^3} > \frac{1}{\pi^3}$.*

$$\begin{aligned} 3 &< \pi \\ 3^3 &< \pi^3 && \text{car la fonction cube est strictement croissante} \\ \frac{1}{3^3} &> \frac{1}{\pi^3} && \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur les positifs} \end{aligned}$$

2. *En déduire une expression de $|\frac{1}{3^3} - \frac{1}{\pi^3}|$ sans valeur absolue.*
   Puisque $\frac{1}{3^3} > \frac{1}{\pi^3}$, alors $\frac{1}{3^3} - \frac{1}{\pi^3} > 0$, et $|\frac{1}{3^3} - \frac{1}{\pi^3}| = \frac{1}{3^3} - \frac{1}{\pi^3}$.

Exercice 3. *On dispose de 100 mètres de cloture, et l'on souhaite créer le champ rectangulaire avec la plus grande aire possible.*

1. *On note x la largeur du champ. Montrer que l'aire est $\mathcal{A}(x) = x(50 - x)$.*
   Supposons que notre champ est un rectangle de côtés x et y. Son périmètre est alors $2x+2y$. Or nous disposons de 100 m de cloture, donc :

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 100 \\ 2y &= 100 - 2x \\ y &= \frac{100 - 2x}{2} \\ y &= 50 - x \end{aligned}$$

   Donc l'aire du champ est $\mathcal{A}(x) = x \times y = x \times (50 - x)$.
2. *Quelle doit être la forme du champ pour que l'aire soit maximale ?*
   La fonction $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré de forme développée $\mathcal{A}(x) = x(50-x) = 50x-x^2 = -x^2+50x$ (donc de paramètres $a = -1$, $b = 50$, $c = 0$).
   L'abscisse de son sommet est donc $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2\times(-1)} = 25$, et l'ordonnée de son sommet est $\beta = \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(25) = 25 \times (50 - 25) = 625$. Son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	25	$+\infty$
$\mathcal{A}$	$\nearrow$	625	$\searrow$

Le maximum de $\mathcal{A}$ est donc 625, atteint pour $x = 25$. Donc pour que l'aire soit maximale, il faut que le champ soit un rectangle de côtés $x = 25$ et $y = 50 - x = 50 - 25 = 25$, c'est-à-dire un carré.

Exercice 4. *On cherche l'expression d'un trinôme du second degré vérifiant les conditions suivantes :*

— *une de ses racines est 4 ;*
— *l'abscisse du sommet de sa parabole est* 3.
— *sa courbe coupe l'axe des ordonnées à l'ordonnée* 8.

1. *Justifier que la seconde racine est 2.*
   Puisque $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$, alors $3 = \frac{4+x_2}{2}$, ce qui nous donne $x_2 = 2$.
2. *Justifier que la forme factorisée de ce trinôme est de la forme suivante, en donnant les valeurs manquantes (sauf a qui sera déterminé à la question suivante) :*

$$a\,(x - \ldots)\,(x - \ldots)$$

   La forme factorisée met en valeur les racines, donc l'expression du trinôme est $a(x-2)(x-4)$.
3. *Enfin, déterminer la valeur de a.*
   Puisque la courbe coupe l'axe des ordonnées en 8, alors l'image de 0 par la fonction est 8, et :

$$\begin{aligned} a(0-2)(0-4) &= 8 \\ 8a &= 8 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

   L'expression du polynôme est donc $1(x-2)(x-4) = (x-2)(x-4)$.

Exercice 5. *Dans cet exercice, toutes les valeurs numériques pourront être arrondies au centième.*
Une éditrice de jeux réfléchit au prix de vente de son prochain produit. Elle a pu estimer que pour un prix de vente unitaire de x, son bénéfice pour l'ensemble des jeux serait, en euros, de $-30x^2 + 2400x - 36000$.

On définit la fonction f sur $[0;+\infty[$ par : $f : x \mapsto -30x^2 + 2400x - 36000$. Cette fonction correspond au bénéfice en fonction du prix de vente unitaire.

1. *Montrer que la forme factorisée de la fonction f est : $f : x \mapsto -30(x-20)(x-60)$.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :
   $$\begin{aligned} -30(x-20)(x-60) &= -30(x^2 - 20x - 60x + 1200) \\ &= -30(x^2 - 80x + 1200) \\ &= -30x^2 + 2400x - 36000 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2. *Dresser le tableau de variations de la fonction f (inclure les ordonnées des extremums).*

x	$-\infty$	40	$+\infty$
f	$\nearrow$	12 000	$\searrow$

   L'abscisse du maximum a été calculée comme $-\frac{2400}{2\times(-30)} = 40$, et son ordonnée comme $f(40) = 12000$.

3. (a) *Sans aucun calcul, donner les racines de f.*
   D'après la forme factorisée, les racines de f sont 20 et 60.
   (b) *En déduire, avec le tableau de variations de f, les solutions de $f(x) \geqslant 0$.* Par définition d'une racine, les solutions de $f(x) = 0$ sont $x = 20$ ou $x = 60$. Donc d'après les variations de f, les solutions de $f(x) \geqslant 0$ sont $x \in]-\infty;+\infty[$.

4. *Répondre aux questions suivantes en utilisant les réponses précédentes.*
   (a) *Donner les prix possibles du jeu pour que l'éditrice gagne de l'argent.*
   L'éditrice gagne de l'argent si son bénéfice est positif, c'est-à-dire si $f(x) \geqslant 0$, donc si $x \in]-\infty;+\infty[$, c'est-à-dire pour un prix de vente compris entre 20 € et 60 €.

(b) *Donner le prix unitaire x donnant le bénéfice maximal.*
Le bénéfice maximal correspond au maximum de f, atteint pour $x = 40$. Le bénéfice maximal est donc atteint pour un prix de vente de 40 €.