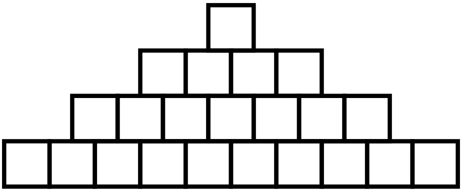
Exercice 2 (Problème ouvert). *Une petite fille empile ses cubes comme indiqué sur la figure ci-dessous (chaque étage contient trois cubes de plus que l'étage du dessus).*



Combien d'étage aura la plus grande pyramide qu'elle pourra construire avec 1729 cubes ? Combien de cubes seront alors utilisés ?

Méthode 1. Avec les suites. On appelle u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : u_n *est le nombre de cubes de l'étage* n *(en partant du haut)* : le premier étage a un cube, donc $u_1 = 1$, le second étage a trois cubes, donc $u_2 = 4$, et ainsi de suite.

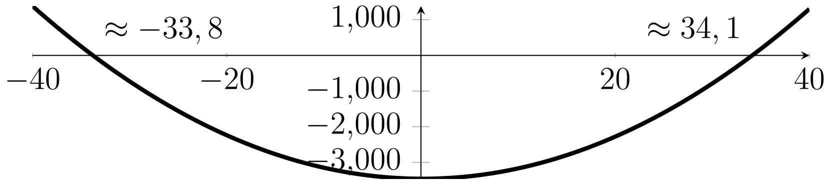
C'est une suite arithmétique de premier terme[1] $u_1 = 1$ et de raison 3. Donc pour n'importe quel nombre n, on a $u_n = 1 + 3(n-1) = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

Une pyramide de n étage contiendra donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ cubes. Puisque la petite fille dispose de 1729 cubes, alors on a :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &\leqslant 1729 \\ n \times \frac{u_1 + u_n}{2} &\leqslant 1729 \\ n \times \frac{1 + 3n - 2}{2} &\leqslant 1729 \\ n \times \frac{3n - 1}{2} &\leqslant 1729 \\ n(3n-1) &\leqslant 3458 \\ 3n^2 - n - 3458 \leqslant 0 \end{aligned}$$

1. Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre comme premier terme u_0 (et non pas u_1), mais cela aurait induit un décalage entre le numéro de l'étage et l'indice du terme de la suite (le nombre de termes du 7e étage aurait alors été u_6 et non pas u_7, par exemple).

Nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour résoudre ce genre d'inéquations de second degré. En traçant la courbe de la fonction f : $x \mapsto 3x^2 - x - 3458$ à la calculatrice, nous obtenons :



Donc les solutions de $3n^2 - n - 3458 \leqslant 0$ sont environ $n \in [-33,8; 34,1]$, et les solutions de $u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant 1729$ sont aussi environ $n \in [-33,8; 34,1]$.
Donc la plus grande valeur possible pour n (qui est un nombre entier) est 34. La petite fille peut donc construire une pyramide de 34 étages au maximum.
C'était une lecture graphique, donc pas rigoureuse. Vérifions que ce résultat est correct.

— Pour $n = 34$, le nombre de cubes utilisés sera $34 \times \frac{u_1 + u_{34}}{2} = 34 \times \frac{1+3\times 34-2}{2} = 1717$.
— Pour $n = 35$, le nombre de cubes utilisés sera $35 \times \frac{u_1 + u_{35}}{2} = 35 \times \frac{1+3\times 35-2}{2} = 1820$.

Donc le nombre d'étages maximal est bien 34 étages.
Méthode 2. Avec le tableur. On construit la feuille de calcul suivante. La première colonne est le numéro de l'étage, la colonne A est le nombre de cubes de cet étage, et la colonne B le nombre de cube de la pyramide qui a ce nombre d'étage.
Pour remplir ce tableur, les cellules $A1$ et $B1$ contiennent les nombres 1, et on écrit dans la cellule $A2$: `=A1+3`, et dans la cellule $B2$: `=B1+A2`. On fait ensuite glisser les formules pour les recopier vers le bas.
Par exemple, la ligne 3 signifie : « Le 3e étage est constitué de 7 cubes, et il faut 12 cubes pour fabriquer une pyramide à 3 étages ».
On observe que la ligne 35 est la première à dépasser le nombre 1729. La plus grande pyramide possible a donc 34 étages, et sera constituée de 1717 cubes.

	A	B
1	1	1
2	4	5
3	7	12
…		
34	100	1717
35	103	1820
36	106	1926

Méthode 3. Avec un algorithme. On met en œuvre l'algorithme suivant, sur calculatrice ou sur ordinateur, où la variable *étage* représente le numéro de l'étage, *ligne* le nombre de cube à cet étage, et *total* le nombre total de cubes de la pyramide jusqu'à présent.

```
étage = 1
ligne = 1
total = 1
while total < 1729:
    étage = étage + 1
    ligne = ligne + 3
    total = total + ligne
print(étage, ligne, total)
```

Ce programme « ajoute » des lignes à la pyramide jusqu'à ce qu'elle dépasse 1729 ; il affiche comme résultat `35 103 1820`, ce qui signifie que le premier étage qui utilise plus de 1729 cubes est le 35e, composé de 103 cubes. Il faut donc le retirer, et cela signifie que la pyramide aura $35 - 1 = 34$ étages composés de $1820 - 103 = 1717$ cubes.

Exercice 3. *Une personne dépose 100€ dans une banque, dans laquelle on lui propose les deux comptes suivants :*

(A) l'argent placé rapporte 5% d'intérêts simples par an (c'est-à-dire que seul l'argent placé au départ rapporte des intérêts) ;

(B) l'argent placé rapporte 3% d'intérêts composés par an (c'est-à-dire que les intérêts d'une année rapportent eux même des intérêts l'année suivante).

1. *Donner, dans les deux cas, la somme d'argent présente sur le compte les trois premières années.*

   Avec le compte A, l'argent placé rapporte chaque année 5% de la somme initiale, soit 5€. Il y aura donc la première année 100€ (la somme initiale), 105€ la seconde année, 110€ la troisième année.

   Avec le compte B, l'argent rapporte chaque année 3% de la somme. Il y aura donc 100€ la première année, $100 + \frac{3}{100} \times 100 = 103$ la seconde année, et $103 + \frac{3}{100} \times 103 = 106,09$ la troisième année.

2. Étude du compte A. *On appelle a la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : a_n est la somme d'argent présente sur le compte au bout de n années (a_0 étant la somme initiale).*

   (a) *Donner les valeurs de a_0, a_1, a_2.*

   D'après les calculs de la première question, on a : $a_0 = 100$, $a_1 = 105$, $a_2 = 110$.

   (b) *Montrer que a est une suite arithmétique de premier terme* 100 *et de raison 5.*

   Comme expliqué précédement, l'argent placé rapporte 5€ par an. Donc la somme sur le compte augmente de 5€ par an, ce qui correspond à une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 100$ et de raison 5.

   (c) *Donner le terme général de la suite a.*

   Puisque a est arithmétique de premier terme $a_0 = 100$ et de raison 5, alors $a_n = a_0 + r \times n = 100 + 5n$.

   (d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ?*

   Au bout de 20 ans, il y aura sur le compte $a_{20} = 100+5\times 20 = 200$ euros.

3. Étude du compte B. *On appelle b la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : b_n est la somme d'argent présente sur le compte au bout de n années (b_0 étant la somme initiale).*

   (a) *Donner les valeurs de b_0, b_1, b_2.*

   D'après les calculs de la première question, on a : $b_0 = 100$, $b_1 = 103$, $b_2 = 106,09$.

(b) *Montrer que b est une suite géométrique de premier terme 100 et de raison $1,03$.*

Chaque année, l'argent placé rapporte 3% d'intérêts. Soit b_n l'argent présent sur le compte l'année n. Alors l'année suivante, il y aura donc :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + 3\% \times b_n \\ &= b_n (1 + 3\%) \\ &= b_n \left(1 + \frac{3}{100}\right) \\ &= 1,03 b_n \end{aligned}$$

La suite b est donc géométrique de premier terme $b_0 = 100$ et de raison $1,03$.

Remarquons que nous aurions pu aller plus vite en nous souvenant de nos cours de seconde : une augmentation de 3% correspond à une multiplication par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$, donc $b_{n+1} = 1,03 b_n$.

(c) *Donner le terme général de la suite b.*

La suite étant géométrique de premier terme $b_0 = 100$ et de raison $1,03$, alors $b_n = b_0 \times q^n = 100 \times 1,03^n$.

(d) *Combien d'argent sera présent sur le compte au bout de 20 ans ?*

Il y aura au bout de vingt ans $b_{20} = 100 \times 1,03^{20} \approx 180,61$ euros.

4. *À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le compte B sera plus intéressant que le compte A.* On observe les données suivantes (arrondies au centième).

Rang	a	b
32	260	257,51
33	265	265,23

Donc à partir de la 33e année, il y a plus d'argent avec le compte B qu'avec le compte A.