Exercice 2. *Dans cet exercice, on souhaite prouver que la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

1. *Rien à écrire ici...*
2. *En utilisant un raisonnemnt* très *similaire, prouver que la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.*

   Soient a et b deux nombres négatifs, tels que $a < b$. Alors : $a - b < 0$.

   Or, puisque a et b sont tous deux négatifs, alors $a + b$ est négatif, donc on peut multiplier à gauche et à droite en changeant le sens de l'inégalité $a - b < 0$. Donc :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &> 0 \times (a+b)\\ a^2 - b^2 &> 0\\ a^2 &> b^2\end{aligned}$$

   Donc quels que soient les nombres négatifs a et b, si $a < b$, alors $a^2 > b^2$: donc la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto |x+1| - |2x-2|.$$

L'objet de l'exercice est de tracer la courbe représentative de cette fonction, ainsi que son tableau de variations.

1. *Dresser le tableau de signes des fonctions affines $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto 2x - 2$.*

   Ce sont deux fonctions affines croissantes (car leurs coefficients directeurs sont strictement positifs), qui changent de signe respectivement en -1 et 1 (solutions de $x + 1 = 0$ et $2x - 2 = 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-2$		$-$		$-$	0	$+$	

2. *Premier cas : $x \leqslant -1$*
   (a) *Montrer que si $x \leqslant -1$, alors $|x+1| = -x-1$ et $|2x-2| = -2x+2$.*
   Si $x \leqslant -1$, alors $x+1 \leqslant 0$ (d'après le tableau de signes), et $|x+1| = -(x+1) = -x-1$.
   De même, si $x \leqslant -1$, alors $2x-2 \leqslant 0$ (d'après le tableau de signes), et $|2x-2| = -(2x-2) = -2x+2$.
   (b) *En déduire que pour $x \leqslant -1$, $f(x) = x-3$.*
   Donc pour tout $x \leqslant -1$:
$$\begin{aligned} f(x) &= |x+1| - |2x-2| \\ &= (-x-1) - (-2x+2) \\ &= -x-1+2x-2 \\ &= x-3 \end{aligned}$$
   (c) *Quelles sont les variations de f pour $x \leqslant -1$?* La fonction f est alors une fonction affine de coefficient directeur 1 strictement positif : elle est strictement croissante.
   (d) *Tracer la courbe de f sur le repère, pour $x \leqslant -1$.*
   Voir en fin de corrigé.

3. *Deuxième cas : $x \in [-1; 1]$*
   (a) *En utilisant la même méthode qu'à la question précédente, montrer que pour $x \in [-1; 1]$, on a $f(x) = 3x-1$.* Si $x \in [-1; 1]$, alors $x+1 \geqslant 0$ (d'après le tableau de signes), et $|x+1| = x+1$.
   De même, si $x \in [-1; 1]$, alors $2x-2 \leqslant 0$ (d'après le tableau de signes), et $|2x-2| = -(2x-2) = -2x+2$.
   Donc pour tout $x \in [-1; 1]$:
$$\begin{aligned} f(x) &= |x+1| - |2x-2| \\ &= (x+1) - (-2x+2) \\ &= x+1+2x-2 \\ &= 3x-1 \end{aligned}$$
   (b) *En déduire les variations de f sur $[-1; 1]$, et tracer sa courbe sur ce même intervalle.* La fonction f est alors une fonction affine de coefficient directeur 3 strictement positif : elle est strictement croissante.
   Voir en fin d'exercice pour la courbe.

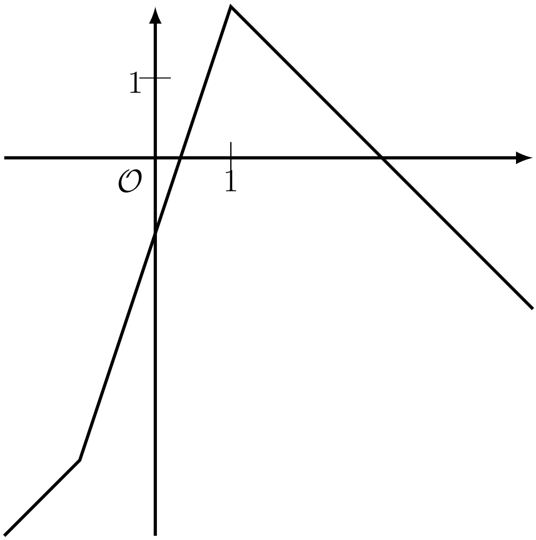
4. *Troisième cas : $x \geqslant 1$.* En utilisant la même méthode, tracer la courbe de la fonction f pour $x \geqslant 1$, et déterminer ses variations sur ce même intervalle.
Si $x \geqslant 1$, alors $x+1 \geqslant 0$ (d'après le tableau de signes), et $|x+1| = x+1$.
De même, si $x \geqslant 1$, alors $2x-2 \geqslant 0$ (d'après le tableau de signes), et $|2x-2| = 2x-2$.
Donc pour tout $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x+1| - |2x-2| \\ &= (x+1) - (2x-2) \\ &= x+1-2x+2 \\ &= -x+3 \end{aligned}$$

La fonction f est alors une fonction affine de coefficient directeur -1 strictement négatif : elle est strictement décroissante.
Voir en fin d'exercice pour la courbe.

5. *Conclure en dressant le tableau de variations de f sur* $]-\infty; +\infty[$.
Nous avons montré que la fonction est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[-1; 1]$: elle est donc strictement croissante sur $]-\infty; 1]$, et $f(1) = |1+1| - |2 \times 1 - 2| = |2| - |0| = 2 - 0 = 2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	



Exercice 4.

Partie A 1.

a	b	$M(a,b)$
2	9	9
3	-5	3
4	1	4

Donc $M(a,b)$ semble renvoyer la plus grande valeur entre a et b.

2. Si $a \geqslant b$, alors $a-b \geqslant 0$, et $|a-b| = a-b$. Donc :

$$\begin{aligned} M(a,b) &= \frac{a+b+|a-b|}{2} \\ &= \frac{a+b+a-b}{2} \\ &= \frac{2a}{2} \\ &= a \end{aligned}$$

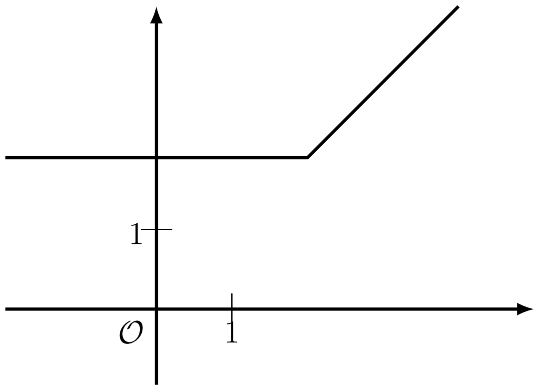
De même, si $a \leqslant b$, alors $a-b \leqslant 0$, et $|a-b| = -(a-b) = -a+b$.

Donc :

$$\begin{aligned} M(a,b) &= \frac{a+b+|a-b|}{2} \\ &= \frac{a+b-a+b}{2} \\ &= \frac{2b}{2} \\ &= b \end{aligned}$$

Dans les deux cas, $M(a,b)$ renvoit donc bien le maximum de a et b.

3. Prenons $a=2$. La courbe de f est alors la suivante.



Si $x \leqslant 2$, alors la plus grande valeur entre 2 et x est 2, donc $M(2,x) = 2$, la fonction est constante et la courbe est une droite parallèle à l'axe des abscisse. En revanche, pour $x \geqslant 2$, alors la plus grande valeur entre 2 et x est x, donc $M(2,x) = x$, et la courbe est la fonction linéaire $f : x \mapsto x$.

Partie B 1.

a	b	$m(a,b)$
2	9	2
3	-5	-5
4	1	1

Donc $m(a,b)$ semble renvoyer la plus petite valeur entre a et b.

2. Si $a \geqslant b$, alors $a - b \geqslant 0$, et $|a-b| = a - b$. Donc :

$$\begin{aligned} m(a,b) &= \frac{a+b-|a-b|}{2} \\ &= \frac{a+b-(a-b)}{2} \\ &= \frac{a+b-a+b}{2} \\ &= \frac{2b}{2} \\ &= b \end{aligned}$$

Donc $m(a,b)$ renvoit b si $a \geqslant b$.
Nous pouvons montrer avec un calcul similaire que si $a \leqslant b$, alors $m(a,b) = a$.
Donc dans les deux cas $m(a,b)$ est la plus petite valeur entre a et b.

Partie C 1.

a	$S(a)$
2	1
3	1
4	1
-1	-1
-10	-1

Donc $S(a)$ semble renvoyer le signe de a : 1 si $a > 0$, et -1 si $a < 0$.

2. Si $a > 0$, alors $|a| = a$, et $S(a) = \frac{|a|}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Donc si a est positif, alors $S(a) = 1$.
De même, si $a < 0$, alors $|a| = -a$, et $S(a) = \frac{|a|}{a} = \frac{-a}{a} = -1$.
Donc si a est négatif, alors $S(a) = -1$.
Donc la fonction S renvoit le signe (1 ou -1) de son argument.