Exercice 1 (8 points)**.** Une entreprise fabrique des jeux en bois. Avant sa commercialisation, chaque jeu est soumis à deux contrôles : un contrôle de peinture et un contrôle de solidité.
Après un très grand nombre de vérifications, on constate que :

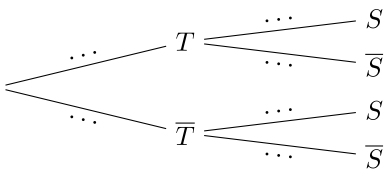
- 8 % des jeux ont un défaut de peinture ;
- parmi les jeux qui n'ont pas de défaut de peinture, 5 % ont un défaut de solidité ;
- 2 % des jeux présentent les deux défauts.

On choisit au hasard un jeu parmi ceux fabriqués par l'entreprise. On note :

— T l'évènement : « le jeu a un défaut de peinture » ;
— S l'évènement : « le jeu a un défaut de solidité ».

1. Justifier que $P_T(S) = 0,25$.

2. Sans justifier, recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilité ci-contre traduisant les données de l'énoncé.



3. Démontrer que la probabilité que le jeu choisi au hasard n'ait pas de défaut de solidité est égale 0,934.
4. Les jeux qui présentent un défaut de solidité sont détruits. Dans cette question, on leur attribuera un prix de vente de 0 €. Les jeux ne présentant aucun défaut sont vendus 14 € chacun. Les autres jeux sont vendus 9 € chacun.
   On note X la variable aléatoire qui donne le prix de vente, en euros, d'un jeu.
   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, pour chaque valeur x_i de X, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$. Vous justifierez le calcul de la probabilité de la première colonne ; les autres valeurs pourront être données sans justification.

x_i	0	9	14
$P(X = x_i)$			

   (b) Quel est le prix de vente moyen d'un jeu fabriqué par cette entreprise ? On arrondira le résultat au centime d'euro.

Exercice 2 (6 points)**.** Une autrice vous demande de l'aide pour concevoir son nouveau jeu de société.
À un moment du jeu, un joueur est autorisé à miser un jeton pour lancer un dé équilibré à vingt faces. S'il obtient :

- 5 ou moins : il ne se passe rien ;
- entre 6 et 15 : il perd un second jeton ;
- entre 16 et 19 : il gagne quatre jetons ;
- 20 : il gagne un nombre de jetons x à déterminer.

On nomme X la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique, en nombre de jetons, à l'issue d'un lancer de dé. L'autrice souhaite que cette expérience soit équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X soit nulle.

1. Recopier et compléter la loi de probabilités suivante.
   Justifiez rigoureusement *une* des valeurs de la deuxième ligne, et donnez les autres valeurs sans justifier.

x_i	-1	-2	3	$x-1$
$P(X = x_i)$		$^{10}/_{20}$		

2. Montrer que l'affirmation « L'espérance est nulle » est équivalente à l'équation :
$$\frac{x-14}{20} = 0$$
3. En déduire la réponse au problème posé : Combien de jetons le joueur doit-il gagner s'il obtient 20 au dé, pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 3 (9 points)**.** Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :
$$\frac{x^2+3}{x+1} \geqslant 2$$
On définit sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (tous les nombres réels sauf -1) la fonction f par :
$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

1. Montrer que pour tout x de son domaine de définition, on a :
$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$
2. Montrer que le tableau de signes de f' est :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

3. En déduire le tableau de variations de f (ne pas oublier de calculer les valeurs des éventuels extremums).
4. En déduire les solutions de l'inéquation de départ.