Exercice 1 (8 points). *Une entreprise fabrique des jeux en bois. Avant sa commercialisation, chaque jeu est soumis à deux contrôles : un contrôle de peinture et un contrôle de solidité.*
Après un très grand nombre de vérifications, on constate que :

- *8 % des jeux ont un défaut de peinture ;*
- *parmi les jeux qui n'ont pas de défaut de peinture, 5 % ont un défaut de solidité ;*
- *2 % des jeux présentent les deux défauts.*

On choisit au hasard un jeu parmi ceux fabriqués par l'entreprise. On note :

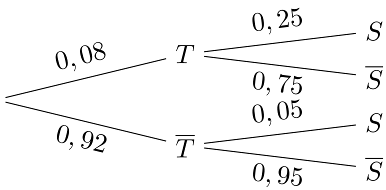
— *T l'évènement : « le jeu a un défaut de peinture » ;*
— *S l'évènement : « le jeu a un défaut de solidité ».*

1. *Justifier que $P_T(S) = 0,25$.*
   D'après l'énoncé :
   — 8 % des jeux ont un défaut de peinture, donc $P(T) = 0,08$;
   — 2 % des jeux présentent les deux défauts, donc $P(T \cap S) = 0,02$.

   Or $P_T(S) = \frac{P(T\cap S)}{P(T)}$, donc :

$$P_T(S) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$$

2. *Sans justifier, recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilité ci-contre traduisant les données de l'énoncé.*



3. *Démontrer que la probabilité que le jeu choisi au hasard n'ait pas de défaut de solidité est égale 0,934.*

$$\begin{aligned} P\left(\overline{S}\right) &= P\left(\overline{S} \cap T\right) + P\left(\overline{S} \cap \overline{T}\right) \\ &= P\left(T\right) \times P_T\left(\overline{S}\right) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}\left(\overline{S}\right) \\ &= 0,08 \times 0,75 + 0,92 \times 0,95 \\ &= 0,934 \end{aligned}$$

4. *Les jeux qui présentent un défaut de solidité sont détruits. Dans cette question, on leur attribuera un prix de vente de 0 €. Les jeux ne présentant aucun défaut sont vendus 14 € chacun. Les autres jeux sont vendus 9 € chacun.*
   On note X la variable aléatoire qui donne le prix de vente, en euros, d'un jeu.
   (a) *Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, pour chaque valeur x_i de X, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$. Vous justifierez le calcul de la probabilité de la première colonne ; les autres valeurs pourront être données sans justification.*

Le jeu ne rapporte rien s'il a un défaut de solidité, c'est-à-dire pour l'évènement S. Or $P(S) = 1 - P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,934 = 0,066$, donc $P(X = 0) = 0,066$.

x_i	0	9	14
$P(X = x_i)$	$0,066$	$0,06$	$0,874$

(b) *Quel est le prix de vente moyen d'un jeu fabriqué par cette entreprise ? On arrondira le résultat au centime d'euro.*
Nous cherchons ici l'espérance de la variable aléatoire X :

$$\begin{aligned}E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 9 \times P(X = 9) + 14 \times P(X = 14)\\ &= 0 \times 0,066 + 9 \times 0,06 + 14 \times 0,874\\ &\approx 12,78\end{aligned}$$

Les jeux sont vendus en moyenne 12,78 euros.

Exercice 2 (6 points)**.** *Une autrice vous demande de l'aide pour concevoir son nouveau jeu de société.*
À un moment du jeu, un joueur est autorisé à miser un jeton pour lancer un dé équilibré à vingt faces. S'il obtient :

- *5 ou moins : il ne se passe rien ;*
- *entre 6 et 15 : il perd un second jeton ;*
- *entre 16 et 19 : il gagne quatre jetons ;*
- *20 : il gagne un nombre de jetons x à déterminer.*

On nomme X la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique, en nombre de jetons, à l'issue d'un lancer de dé. L'autrice souhaite que cette expérience soit équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X soit nulle.

1. *Recopier et compléter la loi de probabilités suivante.*
Justifiez rigoureusement une *des valeurs de la deuxième ligne, et donnez les autres valeurs sans justifier.*
Le dé est équilibré, donc la probabilité d'obtenir 5 ou moins est $^5/_{20} =^1 /_4$. Dans ce cas, le jeton est perdu, donc $P(X = -1) =^1 /_4$.

x_i	-1	-2	3	$x - 1$
$P(X = x_i)$	$^5/_{20} =^1 /_4$	$^{10}/_{20} =^1 /_2$	$^4/_{20} =^1 /_5$	$^1/_{20}$

2. *Montrer que l'affirmation « L'espérance est nulle » est équivalente à l'équation :*

$$\frac{x - 14}{20} = 0$$

$$\begin{aligned}
& E(X) = 0 \\
\iff & -1 \times \frac{5}{20} - 2 \times \frac{10}{20} + 3 \times \frac{1}{20} + (x-1) \times \frac{1}{20} = 0 \\
\iff & \frac{-5 - 20 + 12 + x - 1}{20} = 0 \\
\iff & \frac{x - 14}{20} = 0
\end{aligned}$$

3. *En déduire la réponse au problème posé : Combien de jetons le joueur doit-il gagner s'il obtient 20 au dé, pour que le jeu soit équitable ?*
   Résolvons l'équation précédente : $\frac{x-14}{20} = 0$ est équivalent à $x = 14$, donc pour que l'espérance soit nulle, il faut qu'un joueur gagne 14 jeton lorsqu'il obtient 20 au dé.

Exercice 3 (9 points). *Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :*

$$\frac{x^2+3}{x+1} \geqslant 2$$

On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *(tous les nombres réels sauf* -1*) la fonction* f *par :*

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

1. *Montrer que pour tout* x *de son domaine de définition, on a :*

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

   On note $u(x) = x^2+3$ le numérateur de la fraction, et $v(x) = x+1$ son dénominateur. Alors $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 1$, et :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x \times (x+1) - 1 \times \left(x^2+3\right)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

2. *Montrer que le tableau de signes de* f' *est :* Puisque le dénominateur de $f'(x)$ est un carré, il est toujours positif. Donc étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier le signe de son numérateur x^2+2x-3, qui est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. Ce discriminant est strictement positif, donc le polynôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 1$$

   De plus, puisque le coefficient du x^2 est positif, la fonction polynôme est décroissante puis croissante, donc nous obtenons le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

3. *En déduire le tableau de variations de f (ne pas oublier de calculer les valeurs des éventuels extremums).*
   À la calculatrice, nous obtenons $f(-3) = -6$ et $f(1) = 2$, ce qui donne le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f'		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

4. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.*
   D'après le tableau de variations, pour $x < -1$, le maximum de f est -6, donc l'équation $f(x) \geqslant 2$ n'a pas de solutions sur cet intervalle. En revanche, pour $x > -1$, le minimum de f est 2, donc tous les nombres sont solutions sur cet intervalle.
   Les solutions de $f(x) \geqslant 2$ sont donc $x > -1$.