**Exercice 1.** *L'objet de l'exercice est de résoudre l'équation :*

$$e^{5x} + e^{2x} - e^{3x} - 1 = 0$$

1. *Montrer que résoudre l'équation revient à résoudre :* $\left(e^{2x} - 1\right)\left(e^{3x} + 1\right) = 0$*.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} &\left(e^{2x} - 1\right)\left(e^{3x} + 1\right) = 0 \\ \iff &e^{2x} \times e^{3x} + e^{2x} \times 1 - 1 \times e^{3x} - 1 \times 1 = 0 \\ \iff &e^{5x} + e^{2x} - e^{3x} - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Donc les deux équations sont équivalentes.
2. *En déduire que l'équation revient à résoudre :* $e^{2x} = 1$ *ou* $e^{3x} = -1$*.*
   L'équation obtenue à la question précédente est une équation produit nul, donc résoudre l'équation de départ revient à résoudre :

$$\begin{aligned} &e^{2x} - 1 = 0 \text{ ou } e^{3x} + 1 = 0 \\ \iff \quad &e^{2x} = 1 \text{ ou } e^{3x} = -1 \end{aligned}$$

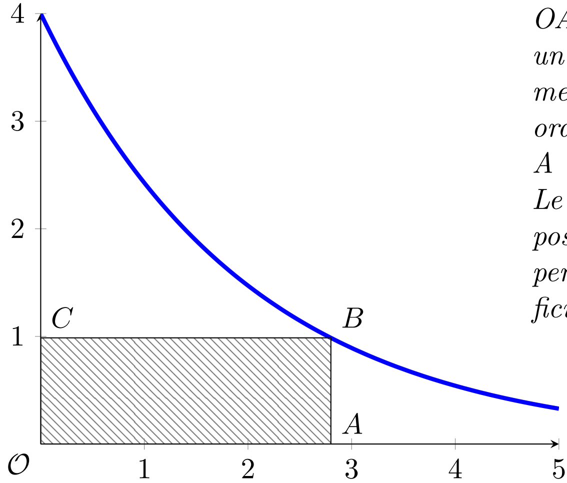
3. *En déduire les solutions de l'équation de départ.* D'une part :

$$\begin{aligned} &e^{2x} = 1 \\ \iff &e^{2x} = e^{0} \\ \iff &2x = 0 \\ \iff &x = 0 \end{aligned}$$

   D'autre part, puisque l'exponentielle est toujours positive, $e^{3x} = -1$ n'a pas de solutions.
   Donc l'équation a une unique solution $\boxed{x = 0}$.

**Exercice 2.** *Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.*
*Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation* $x = 5$ *et la courbe* $\mathcal{C}_f$ *représentative de la fonction* $f$ *définie sur [0 ; 5] par*

$$f(x) = 4e^{-0,5x}.$$




*L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de $\mathcal{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées (5 ; 0).*
*Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.*

1. *Justifier que la superficie de l'enclos, en m$^2$, est donnée en fonction de $x$ par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour $x$ dans l'intervalle [0 ; 5].*
   $OABC$ est un rectangle d'aire $OA \times OC$. Or, puisque $B$ est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x$, alors ses coordonnées sont $B\,(x; f(x))$, c'est-à-dire : $B\left(x; 4e^{-0,5x}\right)$.
   Donc $OA = x$ et $OC = 4e^{-0,5x}$, et donc la superficie $g(x)$ est :
   $$g(x) = OA \times OC = x \times 4e^{-0,5x} = 4xe^{-0,5x}$$

2. *La fonction $g$ est dérivable sur [0 ; 5]. Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle [0 ; 5], on a $g'(x) = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.*
   La fonction $g$ est un produit des fonctions $u$ et $v$ définies par $u(x) = 4x$ et $v(x) = e^{-0,5x}$. Or $u'(x) = 4$, $v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$, et $(uv)' = u'v + v'u$, donc :
   $$\begin{aligned} g'(x) &= 4 \times e^{-0,5x} + 4x \times \left(-0,5e^{-0,5x}\right) \\ &= 4e^{-0,5x} + (4 \times (-0,5))xe^{-0,5x} \\ &= 4e^{-0,5x} - 2xe^{-0,5x} \\ &= (4 - 2x)e^{-0,5x} \end{aligned}$$

3. *En déduire le tableau de variations de la fonction $g$ sur [0 ; 5].*

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4 - 2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $e^{-0,5x}$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x) = (4-2x)e^{-0,5x}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $2,94$ | $\searrow$ | $1,54$ |

Les extremums ont été calculés avec :

$$g(0) = 4 \times 0 \times e^{-0,5\times 0} = 0$$
$$g(2) = 4 \times 2 \times e^{-0,5\times 2} \approx 2,94$$
$$g(5) = 4 \times 5 \times e^{-0,5\times 5} \approx 1,54$$

4. *Où doit-on placer le point $A$ sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ? Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au $dm^2$.*
   Le maximum de $g$ est environ $2,94$, atteint pour $x = 2$, donc le point $A$ doit être placé en $(2;0)$ (c'est-à-dire à deux mètres de l'origine), et la superficie maximale est environ $2{,}94\,\text{m}^2$, soit $\boxed{294\,\text{dm}^2}$.
   *Rappel sur la conversion d'aires :*

| $m^2$ | | $dm^2$ | | $cm^2$ | | $mm^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $2,$ | $9$ | $4$ | | | | |