Exercice 1 (4 points). *Pour chacune des suites u suivantes : (i) calculer u_3 ; (ii) calculer le deuxième terme ; (iii) calculer le terme de rang 4. Arrondir les résultats au centième si nécessaire.*

1. *La suite u définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = 2n^2 - 3$.*
   Les premiers termes de la suite sont : $u_2 = 2 \times 2^2 - 3 = 1$; $u_3 = 2 \times 3^2 - 3 = 15$; $u_4 = 2 \times 4^2 - 3 = 29$.
   Donc : (i) $u_3 = 15$; (ii) le deuxième terme est $u_3 = 15$; (iii) le terme de rang 4 est $u_4 = 29$.
2. *La suite u de premier terme $u_0 = 4$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 2 - u_n$.*
   Les premiers termes de la suite sont : $u_0 = 4$; $u_1 = 2 - u_0 = 2 - 4 = -2$; $u_2 = 2 - u_1 = 2 - (-2) = 4$; $u_3 = 2 - u_2 = 2 - 4 = -2$; $u_4 = 2 - u_3 = 2 - (-2) = 4$.
   Donc : (i) $u_3 = -2$; (ii) le deuxième terme est $u_1 = -2$; (iii) le terme de rang 4 est $u_4 = 4$.

Exercice 2 (4 points). Les deux questions sont indépendantes.

1. *Calculer la somme des cinquante premiers termes de la suite u, arithmétique de premier terme -3 et de raison 5.*
   On note $u_1 = -3$ le premier terme. Puisqu'elle est arithmétique de raison 5, alors le cinquantième terme est $u_{50} = -3 + (50 - 1) \times 5 = 242$, et la somme des cinquante premiers termes est :

$$\begin{aligned}
&\text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2} \\
&= 50 \times \frac{u_1 + u_{50}}{2} \\
&= 50 \times \frac{-3 + 242}{2} \\
&= 5925
\end{aligned}$$

   La somme des cinquante premiers termes est donc 5 925.
2. *Prouver que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2^n}{3}$ est géométrique, et donner son premier terme et sa raison.*

On admet qu'aucun de ses termes ne s'annule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{3}}{\frac{2^n}{3}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{3} \times \frac{3}{2^n} \\ &= \frac{2^{n+1} \times \cancel{3}}{2^n \times \cancel{3}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \\ &= 2\end{aligned}$$

Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est une constante, et la suite v est géométrique de premier terme $v_0 = \frac{2^0}{3} = \frac{1}{3}$ et de raison 2.

Exercice 3 (4 points). *On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \textit{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1,5u_n - 0,5 \end{cases}$$

On admet que cette suite est croissante, et on souhaite connaître le rang du premier terme supérieur à 100. Nous allons répondre à cette question de deux manières différentes. Les deux questions sont indépendantes.

1. *Python. Complétez la fonction ci-contre pour qu'elle renvoie le résultat demandé.*

```
def suite():
    n = 0
    u = 2
    while u < 100:
        n = n + 1
        u = 1.5*u-0.5
    return n
```

2. Calculatrice. *Sans justifier, à l'aide du module suites de votre calculatrice, répondre au problème.*
   À la calculatrice, avec le module suites, on obtient les valeurs suivantes : $u_{11} \approx 87$ et $u_{12} \approx 131$. Donc le rang du premier terme supérieur à 100 est 12.

Exercice 4 (9 points). *En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 20 % de son intensité lumineuse. L'intensité lumineuse est exprimée en candela (cd).*
On utilise une lampe torche qui émet un rayon d'intensité lumineuse réglée à 400 cd.
On superpose n plaques de verres identiques (n étant un entier naturel) et on désire mesurer l'intensité lumineuse I_n du rayon à la sortie de la n-ième plaque.
On note $I_0 = 400$ l'intensité lumineuse du rayon émis par la lampe torche avant de traverser les plaques (intensité lumineuse initiale). Ainsi, cette situation est modélisée par la suite (I_n).

1. *Montrer par un calcul que $I_1 = 320$.*
   Diminuer de 20% revient à multiplier par $0,8$, donc après une plaque, l'intensité lumineuse est $0,8 \times 400 = 320$ cd. Donc $I_1 = 320$.
2. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+1} = 0,8I_n$.*
   Pour tout entier naturel n, I_{n+1} est l'intensité lumineuse après une plaque de plus que I_n, donc l'intensité est réduite de 20%, c'est-à-dire multipliée par $0,8$. Donc $I_{n+1} = 0,8 \times I_n$.
3. *En déduire la nature de la suite (I_n). Préciser sa raison et son premier terme.* Puisque la suite I est caractérisée par $I_{n+1} = 0,8 \times I_n$, alors c'est une suite géométrique de premier terme $I_0 = 400$ et de raison $0,8$.
4. *Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n.*
   Pour tout entier naturel n, on a : $I_n = I_0 \times 0,8^n$, c'est-à-dire $\boxed{I_n = 400 \times 0,8^n}$.
5. *On fait traverser 20 plaques de verre identiques au rayon de la lampe torche. Quelle est l'intensité lumineuse à la sortie des 20 plaques ? Arrondir au dixième de candela près.*

L'intensité lumineuse après 20 plaques est $I_{20} = 400 \times 0,8^{20} \approx 4,6$ cd.