Exercice 1. *Pour chacune des suites u suivantes : (i) calculer u_2 ; (ii) calculer le troisième terme ; (iii) calculer le terme de rang 4. Arrondir les résultats au centième si nécessaire.*

1. *La suite u de premier terme $u_0 = 3$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 2u_n - 1$.*
   Calculons les premiers termes de u.
   - Premier terme : $u_0 = 3$.
   - Second terme : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$.
   - Troisième terme : $u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$.
   - Quatrième terme : $u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$.
   - Cinquième terme : $u_4 = 2u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$.

   Donc :
   (i) $u_2 = 9$;
   (ii) le troisième terme est $u_2 = 9$;
   (iii) le terme de rang 4 est $u_4 = 33$.
2. *La suite u définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{2n}$.*
   (i) $u_2 = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$
   (ii) Puisque le premier terme est u_1, le troisième terme est $u_3 = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$.
   (iii) Le terme de rang 4 est $u_4 = \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8}$.

Exercice 2. *On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :*

$$u_n = \frac{4^n}{9} \quad et \quad \begin{cases} v_0 &= 7 \\ v_{n+1} &= 2v_n - 3 \end{cases}$$

1. *Prouver que u est géométrique.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{4^{n+1}}{9}}{\frac{4^n}{9}} \\ &= \frac{4^{n+1} \times \cancel{9}}{4^n \times \cancel{9}} \\ &= 4^{n+1-n} \\ &= 4 \end{aligned}$$

   Donc la suite u est géométrique de raison 4.

2. *Prouver que v n'est pas arithmétique.*

   Calculons les premiers termes :

   - $v_0 = 7$;
   - $v_1 = 2 \times v_0 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$;
   - $v_2 = 2 \times v_1 - 3 = 2 \times 11 - 3 = 29$.

   Donc $v_2 - v_1 = 29 - 11 = 18$, et $v_1 - v_0 = 11 - 7 = 4$. Ainsi, $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$, et la suite n'est pas arithmétique.

Exercice 3. *On considère une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r tous les deux inconnus. On sait en revanche que $u_{42} + u_{256} = 454$, et que $u_{101} = 149$.*

1. *Exprimer u_{42} et u_{256} en fonction de u_{101} et r.*

   On a :

   - $u_{42} = u_{101} + r \times (42 - 101) = u_{101} - 59r$
   - $u_{256} = u_{101} + r \times (256 - 101) = u_{101} + 155r$

2. *En déduire que $298 + 96r = 454$.* Puisque $u_{42} + u_{256} = 454$, alors :

$$\begin{aligned} u_{42} + u_{256} &= 454 \\ u_{101} - 59r + u_{101} + 155r &= 454 \\ 2u_{101} + 96r &= 454 \\ 2 \times 149 + 96r &= 454 \\ 298 + 96r &= 454 \end{aligned}$$

3. *En déduire les valeurs de u_0 et r.* Puisque $298 + 96r = 454$, alors $96r = 156$ et $r = \frac{156}{96} = 1,625$. Et donc :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{101} + (0 - 101) \times r \\ &= 149 - 101 \times 1,625 \\ &= -15,125 \end{aligned}$$

Exercice 4. *On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \textit{Pour tout } n \in \mathbb{N} \textit{ : } u_{n+1} = 1,4u_n - 1,5 \end{cases}$$

On admet que cette suite est décroissante, et on souhaite connaître le rang du premier terme négatif. Nous allons répondre à cette question de deux manières différentes.

1. *Python : Complétez la fonction ci-contre pour qu'elle renvoit le résultat demandé.*

```
def suite():
    n = 0
    u = 3
    while u > 0:
        u = 1.4*u-1.5
        n = n + 1
    return n
```

2. *Calculatrice : Sans justifier, à l'aide du module suites de votre calculatrice, répondre au problème.*

   On obtient : $n = 5$.

Exercice 5. *À partir de ses dix ans, les parents de Lena lui donnent 10€ chaque mois l'année de ses dix ans, puis 11€ chaque mois l'année de ses 11 ans, et ainsi de suite jusqu'à l'année de ses 25 ans (incluse). L'objet de l'exercice est de calculer la somme totale reçue par Lena.*
On note u la suite définie par « u_n est la somme reçue par Lena durant sa n^e année ». On admet que u est une suite arithmétique.

1. *Justifier que le premier terme est $u_{10} = 120$, et sa raison est 12.*

   L'année de ses dix ans, Lena gagne 10€ par mois pendant douze mois, soit $12 \times 10 = 120$ euros.

   Chaque année, elle gagne 1€ par mois de plus que l'année précédente, soit 12€ de plus sur toute l'année. Donc la raison est 12.

2. *Déterminer la somme d'argent reçue par Lena entre l'année de ses 10 ans et la fin de l'année de ses 25 ans.*

   On cherche la somme des termes de u_{10} à u_{25}. On sait que $u_{10} = 120$; calculons u_{25}.

$$u_{25} = u_{10} + (25 - 10) \times 12 = 120 + 15 \times 12 = 300$$

$$\begin{aligned} u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{25} &= 16 \times \frac{u_{10} + u_{25}}{2} \\ &= 16 \times \frac{120 + 300}{2} \\ &= 3360 \end{aligned}$$

Elle recevra au total 3 360 €.

Exercice 6. *Voir la correction faite en classe.*