Exercice 1 (⭐). *Les questions sont indépendantes.*

1. *Convertir en degrés la mesure d'angle* $\frac{7\pi}{36}$.
   Les mesures en degré et radians sont proportionnelles, avec $180° = \pi\,\text{rad}$, donc :
   $$\begin{aligned}\frac{7\pi}{36}\,\text{rad} &= \left(\frac{180 \times \frac{7\pi}{36}}{\pi}\right)^{\circ} \\ &= \left(\frac{180 \times 7 \times \cancel{\pi}}{36 \times \cancel{\pi}}\right)^{\circ} \\ &= \left(\frac{\cancel{36} \times 5 \times 7}{\cancel{36}}\right)^{\circ} \\ &= 35°\end{aligned}$$

2. *Convertir en radians la mesure d'angle 270°.*
   De même :
   $$\begin{aligned}270° &= \frac{270 \times \pi}{180}\,\text{rad} \\ &= \frac{\cancel{90} \times 3 \times \pi}{\cancel{90} \times 2}\,\text{rad} \\ &= \frac{3\pi}{2}\,\text{rad}\end{aligned}$$

3. *Donner un nombre x tel que :* $\sin x = -\frac{1}{2}$ *et* $\cos x \geqslant 0$.
   Parmi les valeurs remarquables (que nous connaissons par cœur), nous savons que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Or $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors que $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $-\frac{\pi}{6}$ convient (mais il y a une infinité d'autres solutions).

Exercice 2 (⭐). *On admet que* $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, *et on souhaite calculer la valeur exacte de :* $\sin\frac{\pi}{12}$.

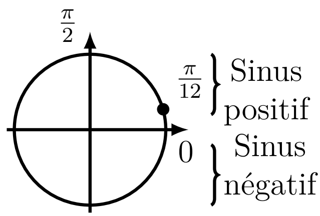
1. *Montrer que :* $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ *(la simplification de la grosse fraction avec carrés et racines carrés pourra être faite à la calculatrice).*

On sait que pour tout nombre t, on a : $\sin^2 t + \cos^2 = 1$. Donc en appliquant cette propriété à $t = \frac{\pi}{12}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} &= 1\\ \sin^2 \frac{\pi}{12} &= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12}\\ \sin^2 \frac{\pi}{12} &= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2\\ \sin^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

John von Neumann aurait probablement faire la dernière étape de tête ; en devoir, nous nous autoriserons à utiliser la calculatrice pour simplifer cette expression mêlant fractions, racines carrées et identités remarquables..

2. *En utilisant le cercle trigonométrique, justifier que :* $\sin \frac{\pi}{12} \geqslant 0$.
   Puisque : $0 < 1 < 6$, alors : $\frac{0\pi}{12} < \frac{\pi}{12} < \frac{6\pi}{12}$, et donc : $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Donc le point du cercle correspondant à l'angle $\frac{\pi}{12}$ est sur le quart supérieur droit du cercle trigonométrique, et son sinus est positif.



3. *En déduire la valeur exacte de :* $\sin \frac{\pi}{12}$ *(ne pas simplifier l'expression obtenue).*
   Nous avons montré à la première question que $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. Donc $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin \frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$. Or, d'après la question précédente : $\sin \frac{\pi}{12} \geqslant 0$. Donc seule la valeur positive convient, et :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Exercice 3. *On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f : x \mapsto 2x^2 - 2x + 1 \\ g : x \mapsto x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

On cherche à déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection des courbes des deux fonctions.
Soit $M(x; y)$ un point d'intersection des deux courbes.

1. *Justifier que : $f(x) = g(x)$.*
   Puisque M est un point de la courbe de f, alors $y = f(x)$. De même, puisque M est sur la courbe de g, alors $y = g(x)$. Donc $f(x) = g(x)$.
2. *En déduire que : $x^2 - 6x + 2 = 0$.*
   Puisque $f(x) = g(x)$, alors :
   $$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 1 &= x^2 + 4x - 1 \\ 2x^2 - x^2 - 2x - 4x + 1 + 1 &= 0 \\ x^2 - 6x + 2 &= 0 \end{aligned}$$
3. *Résoudre l'équation précédente.*
   L'expression $x^2 - 6x + 2$ est un polynôme du second degré, avec $a = 1$, $b = -6$, et $c = 2$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 28$. Le discriminant étant strictement positif, il y a deux racines :
   - $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{28}}{2\times 1} = 3 - \sqrt{7}$.
   - $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{28}}{2\times 1} = 3 + \sqrt{7}$.
4. *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux courbes ?*

   Premier cas : $x = 3 - \sqrt{7}$ Alors, puisque le point M est sur la courbe de f, son ordonnée est $f\left(3 - \sqrt{7}\right) = 2 \times \left(3 - \sqrt{7}\right)^2 - 2 \times \left(3 - \sqrt{7}\right) + 1 = 27 - 10\sqrt{7}$.

   Deuxième cas : $x = 3 + \sqrt{7}$ Alors, puisque le point M est sur la courbe de f, son ordonnée est $f\left(3 + \sqrt{7}\right) = 2 \times \left(3 + \sqrt{7}\right)^2 - 2 \times \left(3 + \sqrt{7}\right) + 1 = 27 + 10\sqrt{7}$.

Les deux courbes ont donc deux points d'intersections :

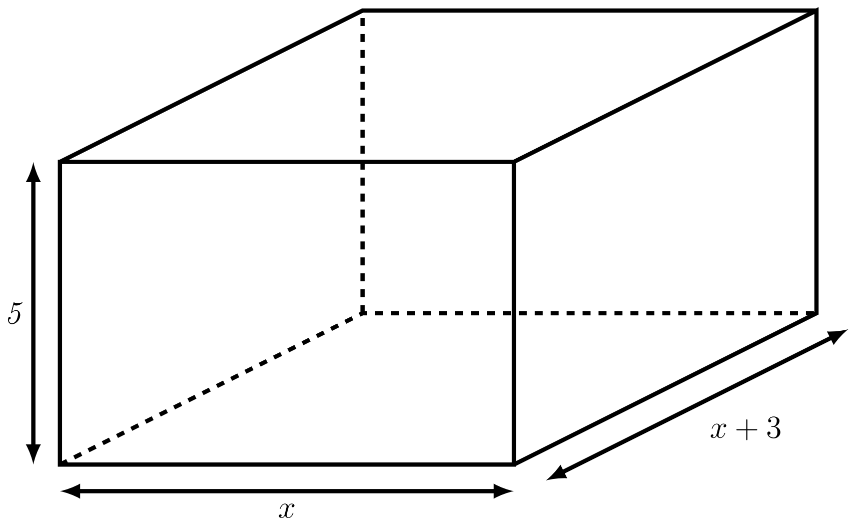
$$M_1\begin{pmatrix}3-\sqrt{3}\\27-10\sqrt{7}\end{pmatrix} \text{ et } M_2\begin{pmatrix}3+\sqrt{3}\\27+10\sqrt{7}\end{pmatrix}$$

Exercice 4. *On souhaite réaliser une boîte ayant une forme de pavé droit de volume 100 cm³, telle que :*

— *la hauteur de la boîte est 5 cm ;*

— *la longueur de la boîte mesure 3 cm de plus que sa largeur.*

On appelle x la largeur de la boîte, en centimètres. La situation est décrite par le schéma suivant (qui n'est pas à l'échelle).



1. *Sans justifier, donner la plus petite et la plus grande valeur que peut prendre x.*

   Le nombre x représentant une longueur, sa plus petite valeur est 0. Il n'y a pas de volume maximal pour la boîte, donc pas de limite supérieure pour x :

$$x \in [0; +\infty[$$

2. *Montrer que le volume de la boîte est donné par la fonction :*

$$V(x) = 5x^2 + 15x$$

La boîte est un pavé droit, donc son volume est le produit de ses trois dimensions, soit :

$$\begin{aligned} V(x) &= 5 \times x \times (x+3) \\ &= 5x^2 + 15x \end{aligned}$$

3. *Montrer que le problème est équivalent à résoudre l'équation :*

$$5x^2 + 15x - 100 = 0$$

Le volume de la boîte doit être égal à $100\,\mathrm{cm}^3$, donc :

$$\begin{aligned} V(x) &= 100 \\ 5x^2 + 15x &= 100 \\ 5x^2 + 15x - 100 &= 0 \end{aligned}$$

4. *Résoudre cette équation, et en déduire les dimensions de la boîte. On arrondira au centimètre.*

L'expression $5x^2 + 15x - 100$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 15^2 - 4 \times 5 \times (-100) = 2225$. Il est strictement positif, donc il y a deux racines :

- $x_1 = \frac{-15-\sqrt{2225}}{2\times 5} \approx -6$
- $x_2 = \frac{-15+\sqrt{2225}}{2\times 5} \approx 3$

Or l'inconnue est une longueur, donc la solution négative est exclue, et donc $x \approx 3$. Les dimensions de la boîte (arrondies au centimètre) sont donc, en centimètres : $5 \times 3 \times 6$.