

Exercice 1 (★). *Les questions sont indépendantes.*

1. Convertir en degrés la mesure d'angle $\frac{7\pi}{36}$.

Les mesures en degré et radians sont proportionnelles, avec $180^\circ = \pi \text{ rad}$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{36} \text{ rad} &= \left(\frac{180 \times \frac{7\pi}{36}}{\pi} \right)^\circ \\ &= \left(\frac{180 \times 7 \times \cancel{\pi}}{36 \times \cancel{\pi}} \right)^\circ \\ &= \left(\frac{\cancel{36} \times 5 \times 7}{\cancel{36}} \right)^\circ \\ &= 35^\circ \end{aligned}$$

2. Convertir en radians la mesure d'angle 270° .

De même :

$$\begin{aligned} 270^\circ &= \frac{270 \times \pi}{180} \text{ rad} \\ &= \frac{\cancel{90} \times 3 \times \pi}{\cancel{90} \times 2} \text{ rad} \\ &= \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

3. Donner un nombre x tel que : $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\cos x \geq 0$.

Parmi les valeurs remarquables (que nous connaissons par cœur), nous savons que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Or $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors que $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $-\frac{\pi}{6}$ convient (mais il y a une infinité d'autres solutions).

Exercice 2 (★). *On admet que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, et on souhaite calculer la valeur exacte de : $\sin \frac{\pi}{12}$.*

1. Montrer que : $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ (la simplification de la grosse fraction avec carrés et racines carrés pourra être faite à la calculatrice).

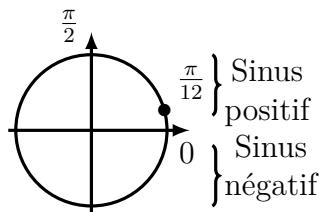
On sait que pour tout nombre t , on a : $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Donc en appliquant cette propriété à $t = \frac{\pi}{12}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} &= 1 \\ \sin^2 \frac{\pi}{12} &= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{12} \\ \sin^2 \frac{\pi}{12} &= 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 \\ \sin^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

John von Neumann aurait probablement faire la dernière étape de tête ; en devoir, nous nous autoriserons à utiliser la calculatrice pour simplifier cette expression mêlant fractions, racines carrées et identités remarquables..

2. *En utilisant le cercle trigonométrique, justifier que : $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$.*

Puisque : $0 < 1 < 6$, alors : $\frac{0\pi}{12} < \frac{\pi}{12} < \frac{6\pi}{12}$, et donc : $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Donc le point du cercle correspondant à l'angle $\frac{\pi}{12}$ est sur le quart supérieur droit du cercle trigonométrique, et son sinus est positif.



3. *En déduire la valeur exacte de : $\sin \frac{\pi}{12}$ (ne pas simplifier l'expression obtenue).*

Nous avons montré à la première question que $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$. Donc $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin \frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$. Or, d'après la question précédente : $\sin \frac{\pi}{12} \geq 0$. Donc seule la valeur positive convient, et :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

Exercice 3. On considère les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f : x \mapsto 2x^2 - 2x + 1 \\ g : x \mapsto x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

On cherche à déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection des courbes des deux fonctions.

Soit $M(x; y)$ un point d'intersection des deux courbes.

1. Justifier que : $f(x) = g(x)$.

Puisque M est un point de la courbe de f , alors $y = f(x)$. De même, puisque M est sur la courbe de g , alors $y = g(x)$. Donc $f(x) = g(x)$.

2. En déduire que : $x^2 - 6x + 2 = 0$.

Puisque $f(x) = g(x)$, alors :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 1 &= x^2 + 4x - 1 \\ 2x^2 - x^2 - 2x - 4x + 1 + 1 &= 0 \\ x^2 - 6x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

3. Résoudre l'équation précédente.

L'expression $x^2 - 6x + 2$ est un polynôme du second degré, avec $a = 1$, $b = -6$, et $c = 2$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 28$. Le discriminant étant strictement positif, il y a deux racines :

$$\begin{aligned} \bullet x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{28}}{2 \times 1} = 3 - \sqrt{7}. \\ \bullet x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{28}}{2 \times 1} = 3 + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

4. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux courbes ?

Premier cas : $x = 3 - \sqrt{7}$ Alors, puisque le point M est sur la courbe de f , son ordonnée est $f(3 - \sqrt{7}) = 2 \times (3 - \sqrt{7})^2 - 2 \times (3 - \sqrt{7}) + 1 = 27 - 10\sqrt{7}$.

Deuxième cas : $x = 3 + \sqrt{7}$ Alors, puisque le point M est sur la courbe de f , son ordonnée est $f(3 + \sqrt{7}) = 2 \times (3 + \sqrt{7})^2 - 2 \times (3 + \sqrt{7}) + 1 = 27 + 10\sqrt{7}$.

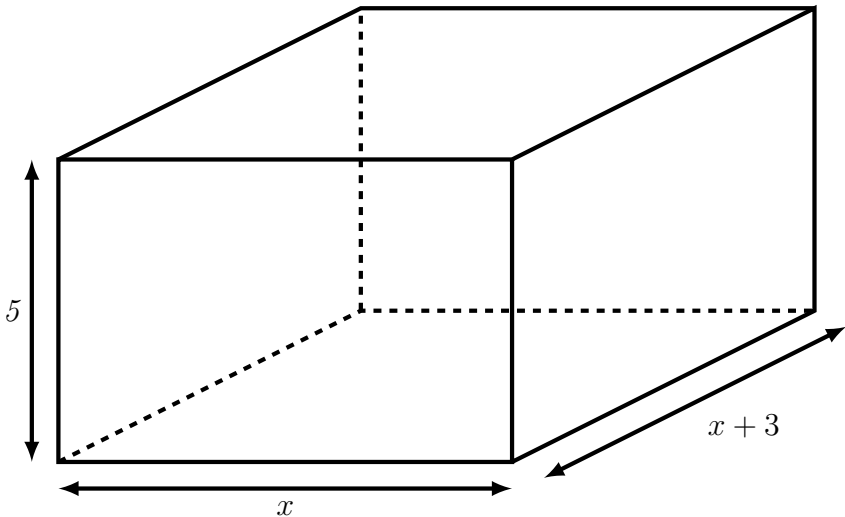
Les deux courbes ont donc deux points d'intersections :

$$M_1 \left(\begin{array}{c} 3 - \sqrt{3} \\ 27 - 10\sqrt{7} \end{array} \right) \text{ et } M_2 \left(\begin{array}{c} 3 + \sqrt{3} \\ 27 + 10\sqrt{7} \end{array} \right)$$

Exercice 4. On souhaite réaliser une boîte ayant une forme de pavé droit de volume 100 cm^3 , telle que :

- la hauteur de la boîte est 5 cm ;
- la longueur de la boîte mesure 3 cm de plus que sa largeur.

On appelle x la largeur de la boîte, en centimètres. La situation est décrite par le schéma suivant (qui n'est pas à l'échelle).



1. Sans justifier, donner la plus petite et la plus grande valeur que peut prendre x .

Le nombre x représentant une longueur, sa plus petite valeur est 0. Il n'y a pas de volume maximal pour la boîte, donc pas de limite supérieure pour x :

$$x \in [0; +\infty[$$

2. Montrer que le volume de la boîte est donné par la fonction :

$$V(x) = 5x^2 + 15x$$

La boîte est un pavé droit, donc son volume est le produit de ses trois dimensions, soit :

$$\begin{aligned}V(x) &= 5 \times x \times (x + 3) \\ &= 5x^2 + 15x\end{aligned}$$

3. *Montrer que le problème est équivalent à résoudre l'équation :*

$$5x^2 + 15x - 100 = 0$$

Le volume de la boîte doit être égal à 100 cm^3 , donc :

$$\begin{aligned}V(x) &= 100 \\ 5x^2 + 15x &= 100 \\ 5x^2 + 15x - 100 &= 0\end{aligned}$$

4. *Résoudre cette équation, et en déduire les dimensions de la boîte. On arrondira au centimètre.*

L'expression $5x^2 + 15x - 100$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 15^2 - 4 \times 5 \times (-100) = 2225$. Il est strictement positif, donc il y a deux racines :

- $x_1 = \frac{-15 - \sqrt{2225}}{2 \times 5} \approx -6$
- $x_2 = \frac{-15 + \sqrt{2225}}{2 \times 5} \approx 3$

Or l'inconnue est une longueur, donc la solution négative est exclue, et donc $x \approx 3$. Les dimensions de la boîte (arrondies au centimètre) sont donc, en centimètres : $5 \times 3 \times 6$.