Exercice 1 (Jeu infini). *Une kermesse propose le jeu suivant : un joueur lance un dé équilibré à six faces. Si 2, 3, 4, 5 ou 6 est obtenu, il gagne le nombre de bonbons indiqués sur le dé et le jeu s'arrête. Si 1 est obtenu, il gagne un bonbon, et relance le dé pour le même jeu.*
Par exemple : une joueuse lance le dé et obtient 1 : elle gagne un bonbon et rejoue. Elle fait à nouveau 1 : elle gagne un second bonbon. Elle relance le dé et obtient 3 : elle gagne trois bonbons et le jeu s'arrête. Elle a gagné au total 5 bonbons.
L'objet de l'exercice est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X associée au nombre de bonbons gagnés à ce jeu. La formule vue en cours ne peut pas être utilisée car le nombre de lancers n'étant pas limité, l'univers est infini.
On fait alors l'hypothèse suivante : sur un 1, plutôt que relancer le dé, on gagne $1+E(X)$, c'est-à-dire 1 plus le gain moyen obtenu sur le second lancer (qui est identique au gain moyen du jeu). Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont alors $\{1+E(X), 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. *Dresser la loi de probabilité de X.* Le dé est équilibré, donc les six issues sont équiprobables (de probabilité 1/6).

x	$1+E(X)$	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2. *En utilisant la formule de l'espérance vue en cours, montrer que $E(X)=\frac{21+E(X)}{6}$.*

$$E(X)=\frac{1}{6}\times(1+E(X))+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\ldots+\frac{1}{6}\times 6$$
$$E(X)=\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times E(X)+\frac{20}{6}$$
$$E(X)=\frac{21+E(X)}{6}$$

3. *Résoudre l'équation pour déterminer $E(X)$.*

$$E(X)=\frac{21+E(X)}{6}$$
$$6E(X)=21+E(X)$$
$$5E(X)=21$$
$$E(X)=\frac{21}{5}$$

Donc le gain moyen est $\frac{21}{5}$, soit 4,2 bonbons par partie.

Pour être rigoureux, avec cette méthode, nous n'avons pas prouvé que $E(X)$ est égale à la valeur trouvée à la question précédente : nous avons seulement montré que si l'espérance $E(X)$ existe*, elle est égale à cette valeur.*

4. Difficile. *Modifier cette expérience aléatoire, ou en inventer une nouvelle, telle que la résolution de l'équation obtenue par la même méthode qu'à la question 2 ne donne pas un résultat correct. Expliquer l'erreur en termes non mathématiques : Quelles caractéristiques de l'expérience aléatoire font que le résultat n'est pas correct ?*

   Je remplace discrètement le dé par un dé pipé qui fait toujours 1. La loi de probabilité de la variable aléatoire Y représentant la nouvelle expérience est donc :

Gain	$1+E(Y)$
Probabilité	1

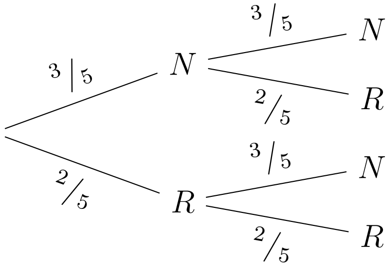
   Donc l'espérance est $E(Y) = 1\times(1+E(Y))$, et en résolvant l'équation, on trouve $0 = 1$, ce qui est impossible. L'équation n'a donc pas de solutions.

   Le problème de cette expérience est que l'espérance est infinie : en moyenne, on « gagne » une infinité de bonbons. La méthode utilisée à la question précédente ne fonctionne donc plus.

Exercice 2 (D'après l'exercice 2 du sujet d'EC n° 45)**.** *Une urne contient deux boules rouges et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.*
On tire au hasard et avec remise deux boules dans l'urne en notant leur couleur.
On note R l'évènement « tirer une boule rouge » et N l'évènement « tirer une boule noire ».

1. *Dresser l'arbre de probabilités correspondant à cette expérience.*

   Les boules sont indiscernables au toucher, donc la situation est équiprobable, donc la probabilité de piocher une boule noire est $^3/_5$, et celle de piocher une boule blanche est $^2/_5$, ce qui nous donne l'arbre suivant.



2. *Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?*
   Le seul chemin correspondant à cette issue est celui du bas, donc $P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

Si un joueur tire une boule rouge, il gagne 20 *euros. S'il tire une boule noire, il perd* 10 *euros. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, en euros, à l'issue des deux tirages successifs.*

3. *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

   - La seule manière de gagner 40 euros est de tirer deux boules rouges, donc $P(X = 40) = P(RR) = \frac{4}{25}$.
   - Il y a deux manières de gagner 10 euros : tirer une boule rouge puis une noire, ou l'inverse. Donc : $P(X = 10) = P(RN) + P(NR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$.
   - Enfin, obtenir deux boules noires fait perdre 20 euros : $P(-20) = P(NN) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

   La loi de probabilités est donc :

x	-20	10	40
$P(X = x)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

4. *Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent.*

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= P(X = 10) + P(X = 40) \\ &= \frac{12}{25} + \frac{4}{25} \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

   La probabilité que le joueur gagne de l'argent est donc $\frac{16}{25}$.

5. *Sans justifier, donner l'espérance et l'écart-type de cette variable aléatoire. Donner une interprétation de l'espérance.*

   À l'aide du module statistiques de la calculatrice, on obtient : $E(X) = 4$ et $\sigma(X) \approx 20,8$.

   Donc le gain moyen à ce jeu est 4 euros.

Exercice 3 (Inspiré de l'exercice 4 du sujet d'EC n° 43)**.** *Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école.*
Une urne opaque contient des billes indiscernables au toucher : 20 billes rouges, 30 billes blanches et un certain nombre de billes vertes à déterminer.
Pour une partie, chaque joueur doit miser 2 jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

— *Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.*

— *Si la bille est blanche, le joueur récupère 4 jetons.*

— *Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien.*

Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent que le jeu leur soit favorable : ils veulent choisir le nombre de billes vertes afin que l'espérance devienne égale à -1.
On note v le nombre de billes vertes dans l'urne, et X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est-à-dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1. *Montrer que la loi de probabilité de X est donnée par :*

x	-2	2	6
$P(X = x)$	$\frac{v}{50+v}$	$\frac{30}{50+v}$	$\frac{20}{50+v}$

   Remarquons d'abord que la situation est équiprobable, car les billes sont indiscernables au toucher, et que le nombre total de billes est $20 + 30 + v = 50 + v$.

   - Si la bille est rouge, le joueur gagne 8 jetons, auxquels il faut soustraire la mise de 2 jetons. Donc $P(X = 6) = \frac{20}{50+v}$.
   - Si la bille est blanche, le joueur gagne 4 jetons, auxquels il faut soustraire la mise de 2 jetons. Donc $P(X = 2) = \frac{30}{50+v}$.
   - Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien, et a donc perdu sa mise de 2 jetons. Donc $P(X = -2) = \frac{v}{50+v}$.

Cela donne la loi de probabilité demandée.

2. *Montrer que l'espérance de la variable aléatoire est donnée par la formule :* $\frac{180-2v}{50+v}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= -2 \times \frac{v}{50+v} + 2 \times \frac{30}{50+v} + 6 \times \frac{20}{50+v} \\
&= \frac{-2v}{50+v} + \frac{60}{50+v} + \frac{120}{50+v} \\
&= \frac{-2v+60+120}{50+v} \\
&= \frac{180-2v}{50+v}
\end{aligned}$$

3. *En déduire le nombre de billes vertes à ajouter pour que l'espérance du jeu soit égale à* -1.

   Résolvons l'équation $E(X) = -1$. Notons que le produit par $50+v$ de la deuxième à la troisième ligne est possible car $50+v$ est un nombre strictement positif.

$$\begin{aligned}
E(X) &= -1 \\
\frac{180-2v}{50+v} &= -1 \\
180-2v &= -50-v \\
230 &= v
\end{aligned}$$

   Il faut donc 230 billes vertes pour que le jeu soit équitable.