Exercice 2 (D'après l'exercice 2 du sujet du sujet 1 d'E3C 2 — Première générale — Spécialité mathématiques)**.**

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat (c'est-à-dire la somme d'argent gagnée (en positif), ou perdue (en négatif)), en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \text{ pour tout réel } x \in [2; 20].$$

1. *Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.*

$$\begin{aligned} R(7) &= (5 \times 7 - 30)\, e^{-0,25\times 7} \\ &\approx 0,868\,9 \end{aligned}$$

   Donc le résultat pour la vente de 7 centaines de litres de produit est 0,868 9 dizaines de milliers d'euros environ, soit 8 689 euros environ.

2. *Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).*

$$\begin{aligned} R(4) &= (5 \times 4 - 30)\, e^{-0,25\times 4} \\ &\approx -3,7 \end{aligned}$$

   Donc $R(4) < 0$: le résultat pour la vente de 400 litres de produit est négatif.

3. *Résoudre l'inéquation $R(x) > 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.*

   Remarquons qu'une exponentielle est toujours strictement positive, et que $x \mapsto 5x - 30$ est une fonction affine.

x	2		6		20
$5x - 30$		$-$	0	$+$	
$e^{-0,25x}$		$+$		$+$	
$R(x) = (5x-30)e^{-0,25x}$		$-$	0	$+$	

Donc les solutions de $R(x) > 0$ sont $x \in]6;20]$. En d'autres termes, le résultat sera positif à partir de 600 litres de produit fabriqués et vendus.

4. *Calculer l'expression de la dérivée R' de la fonction R.*
En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.
On pose, pour tout $x \in [2;20]$:

$$u(x) = 5x - 30 \text{ et } v(x) = e^{-0,25x}$$

Donc :

$$u'(x) = 5 \text{ et } v'(x) = -0,25e^{-0,25x}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} R'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 5e^{-0,25x} + (5x - 30) \times (-0,25)e^{-0,25x} \\ &= (5 + (5x - 30) \times (-0,25))\, e^{-0,25x} \\ &= (5 - 1,25x + 7,5)\, e^{-0,25x} \\ &= (12,5 - 1,25x)\, e^{-0,25x} \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes de $R'(x)$, pour en déduire les variations de R.

x	2		10		20
$12,5 - 1,25x$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,25x}$		$+$		$+$	
$R'(x) = (12,5 - 1,25x)e^{-0,25x}$		$+$	0	$-$	
R	$-12,1$	$\nearrow$	$1,6$	$\searrow$	$0,5$

Les valeurs des extremums (arrondies au dixième) ont été calculées comme suit :

- $R(2) = (5 \times 2 - 30) \times e^{-0,25 \times 2} \approx -12,1$
- $R(10) = (5 \times 10 - 30) \times e^{-0,25 \times 10} \approx 1,6$
- $R(20) = (5 \times 20 - 30) \times e^{-0,25 \times 20} \approx 0,5$

Le résultat maximal est donc atteint pour la fabrication et la vente de 10 centaines de litres de produit, soit 1 000 litres.

Exercice 3. *On appelle* cosinus hyperbolique *la fonction notée* cosh*, et définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. *Prouver que l'équation* $\cosh x = 0$ *n'a pas de solutions.*
   Puisque l'exponentielle est toujours strictement posivite, alors pour toute valeur de x réelle, on a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$, et donc $\cosh x > 0$. Donc l'équation $\cosh x = 0$ n'a pas de solutions.
2. *L'objet de cette question est de déterminer les solutions de* $\cosh x = 1$.
   (a) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :* $\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   La dérivée de $x \mapsto e^x$ est elle-même, et la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$. Donc la dérivée du cosinus hyperbolique est :

$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   (b) *Montrer que les solutions de* $\cosh' x > 0$ *sont :* $x > 0$. Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} \cosh' x > 0 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \\ &\iff e^x - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff x > -x \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

   (c) *En déduire le tableau de signes de* $\cosh' x$*, puis le tableau de variations de* cosh.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cosh' x$		$-$	0	$+$	
$\cosh$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Le minimum a été calculé avec :

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

(d) *Combien l'équation* $\cosh x = 1$ *a-t-elle de solutions ? Quelles sont leurs valeurs ?*
D'après le tableau de variations de cosh, 1 est le minimum de la fonction, atteint pour $x = 0$. Donc l'équation $\cosh x = 1$ a une unique solution : $\boxed{x = 1}$.