

Exercice 2 (D'après l'exercice 2 du sujet du sujet 1 d'E3C 2 — Première générale — Spécialité mathématiques).

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2000 litres de produit par semaine. Le résultat (c'est-à-dire la somme d'argent gagnée (en positif), ou perdue (en négatif)), en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \text{ pour tout réel } x \in [2; 20].$$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.

$$\begin{aligned} R(7) &= (5 \times 7 - 30)e^{-0,25 \times 7} \\ &\approx 0,8689 \end{aligned}$$

Donc le résultat pour la vente de 7 centaines de litres de produit est 0,8689 dizaines de milliers d'euros environ, soit 8689 euros environ.

2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).

$$\begin{aligned} R(4) &= (5 \times 4 - 30)e^{-0,25 \times 4} \\ &\approx -3,7 \end{aligned}$$

Donc $R(4) < 0$: le résultat pour la vente de 400 litres de produit est négatif.

3. Résoudre l'inéquation $R(x) > 0$, d'inconnue x . Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Remarquons qu'une exponentielle est toujours strictement positive, et que $x \mapsto 5x - 30$ est une fonction affine.

x	2	6	20
$5x - 30$	-	0	+
$e^{-0,25x}$	+		+
$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}$	-	0	+

Donc les solutions de $R(x) > 0$ sont $x \in]6; 20]$. En d'autres termes, le résultat sera positif à partir de 600 litres de produit fabriqués et vendus.

4. Calculer l'expression de la dérivée R' de la fonction R .

En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

On pose, pour tout $x \in [2; 20]$:

$$u(x) = 5x - 30 \text{ et } v(x) = e^{-0,25x}$$

Donc :

$$u'(x) = 5 \text{ et } v'(x) = -0,25e^{-0,25x}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} R'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 5e^{-0,25x} + (5x - 30) \times (-0,25)e^{-0,25x} \\ &= (5 + (5x - 30) \times (-0,25)) e^{-0,25x} \\ &= (5 - 1,25x + 7,5) e^{-0,25x} \\ &= (12,5 - 1,25x) e^{-0,25x} \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes de $R'(x)$, pour en déduire les variations de R .

x	2	10	20
$12,5 - 1,25x$	+	0	-
$e^{-0,25x}$	+	+	+
$R'(x) = (12,5 - 1,25x)e^{-0,25x}$	+	0	-
R	-12,1	1,6	0,5

Les valeurs des extremums (arrondies au dixième) ont été calculées comme suit :

- $R(2) = (5 \times 2 - 30) \times e^{-0,25 \times 2} \approx -12,1$
- $R(10) = (5 \times 10 - 30) \times e^{-0,25 \times 10} \approx 1,6$
- $R(20) = (5 \times 20 - 30) \times e^{-0,25 \times 20} \approx 0,5$

Le résultat maximal est donc atteint pour la fabrication et la vente de 10 centaines de litres de produit, soit 1 000 litres.

Exercice 3. On appelle cosinus hyperbolique la fonction notée \cosh , et définie sur \mathbb{R} par :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Prouver que l'équation $\cosh x = 0$ n'a pas de solutions.

Puisque l'exponentielle est toujours strictement positive, alors pour toute valeur de x réelle, on a $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $e^x + e^{-x} > 0$, et donc $\cosh x > 0$. Donc l'équation $\cosh x = 0$ n'a pas de solutions.

2. L'objet de cette question est de déterminer les solutions de $\cosh x = 1$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

La dérivée de $x \mapsto e^x$ est elle-même, et la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$. Donc la dérivée du cosinus hyperbolique est :

$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- (b) Montrer que les solutions de $\cosh' x > 0$ sont : $x > 0$. Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} \cosh' x > 0 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \\ &\iff e^x - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff x > -x \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

- (c) En déduire le tableau de signes de $\cosh' x$, puis le tableau de variations de \cosh .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\cosh' x$		- 0 + ⋮	
\cosh			

Le minimum a été calculé avec :

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

- (d) *Combien l'équation $\cosh x = 1$ a-t-elle de solutions ? Quelles sont leurs valeurs ?*

D'après le tableau de variations de \cosh , 1 est le minimum de la fonction, atteint pour $x = 0$. Donc l'équation $\cosh x = 1$ a une unique solution : $\boxed{x = 0}$.