

Faire l'un des deux menus suivants :

**Menu 1 (moins difficile) :** Exercices 1, 2, 3.

**Menu 2 (plus difficile) :** Exercices 1, 2, 4.

**Exercice 1** (Culture générale). Citez un problème ouvert en mathématiques (c'est-à-dire un problème que personne au monde ne sait résoudre).

**Exercice 2.** On admet que  $\sin \frac{7\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ , et on souhaite calculer la valeur exacte de  $\cos \frac{7\pi}{10}$ .

1. Montrer que  $\cos^2 \left( \frac{7\pi}{10} \right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$  (vous pouvez utiliser la calculatrice *uniquement* pour simplifier l'expression obtenue).
2. En plaçant  $\frac{7\pi}{10}$  sur le cercle trigonométrique, justifier que :

$$\cos \frac{7\pi}{10} < 0$$

3. En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{7\pi}{10}$  (ne pas simplifier l'expression).

**Exercice 3** (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(13; 9)$  et de rayon 6 ;
- la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x - 5$ .

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

1. Soit  $M(x; y)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Déterminer la longueur  $AM$ , puis justifier que  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ .

On considère un point  $M(x; y)$  du plan. On admet que ce point est sur le cercle  $\mathcal{C}$  si et seulement si l'équation  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$  est vérifiée.

2. Justifier que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases}$$

3. En déduire que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 4** (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le nombre réel  $\alpha$  ;
- le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A(13;9)$  et de rayon 6 ;
- la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \alpha x - 4\alpha + 3$ .

La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre  $\alpha$ . On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  en fonction de ce paramètre  $\alpha$ .

1. Soit  $M(x; y)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Déterminer la longueur  $AM$ , puis justifier que  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ .

On considère un point  $M(x; y)$  du plan. On admet que ce point est sur le cercle  $\mathcal{C}$  si et seulement si l'équation  $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$  est vérifiée.

2. Justifier que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

3. En déduire que  $M$  est à la fois sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (\alpha^2 + 1)x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de  $x$  (abscisse des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ ), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta = (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 \times (\alpha^2 + 1) (16\alpha^2 + 48\alpha + 169)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas<sup>1</sup>.

$\text{developper}((8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 * (\alpha^2 + 1) * (16\alpha^2 + 48\alpha + 169))$
$-180 * \alpha^2 + 432 * \alpha$

4. Dresser, en fonction de  $\alpha$ , le tableau de signes de l'expression  $-180\alpha^2 + 432\alpha$ .
5. En déduire, en fonction de  $\alpha$ , le nombre de solutions du système de la question 3, puis le nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

---

<sup>1</sup>C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur GNU/Linux, Windows et MacOS : <https://www.fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>.