

Exercice 2. On admet que $\sin \frac{7\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et on souhaite calculer la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{10}$.

1. Montrer que $\cos^2 \left(\frac{7\pi}{10} \right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ (vous pouvez utiliser la calculatrice uniquement pour simplifier l'expression obtenue).

On sait que pour tout nombre t , on a : $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Donc en appliquant cette propriété à $t = \frac{7\pi}{10}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{7\pi}{10} + \cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 \\ \cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 - \sin^2 \frac{7\pi}{10} \\ \cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

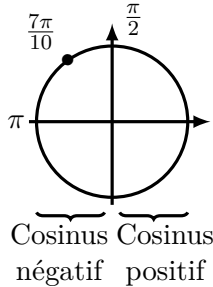
Remarque : À partir de cette étape, vous pouvez faire la simplification à la calculatrice. Si nous voulons le faire à la main, cela donne le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4^2} \\ &= 1 - \frac{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{16} \\ &= \frac{16}{16} - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} \\ &= \frac{16}{16} - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{16 - 6 - 2\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{2 \times (5 - \sqrt{5})}{2 \times 8} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

2. En plaçant $\frac{7\pi}{10}$ sur le cercle trigonométrique, justifier que :

$$\cos \frac{7\pi}{10} < 0$$

Puisque : $5 < 7 < 10$, alors : $\frac{5\pi}{10} < \frac{7\pi}{10} < \frac{10\pi}{10}$, et donc : $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{10} < \pi$. Donc le point du cercle correspondant à l'angle $\frac{7\pi}{10}$ est sur le quart supérieur gauche du cercle trigonométrique, et son cosinus est négatif.



3. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{10}$ (ne pas simplifier l'expression).

Nous avons montré à la première question que $\cos^2 \frac{7\pi}{10} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. Donc $\cos \frac{7\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\cos \frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Or, d'après la question précédente : $\cos \frac{7\pi}{10} < 0$. Donc seule la valeur négative convient, et :

$$\cos \frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 3 (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le cercle \mathcal{C} de centre $A(13;9)$ et de rayon 6 ;
- la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x - 5$.

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de \mathcal{C} et \mathcal{D} .

1. Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{C} . Déterminer la longueur AM , puis justifier que $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

Puisque M est un point du cercle de centre A , alors $[AM]$ est un rayon, donc

$$AM = 6.$$

$$\begin{aligned} AM &= 6 \\ \iff \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} &= 6 \\ \iff \sqrt{(x - 13)^2 + (y - 9)^2} &= 6 \\ \iff (x - 13)^2 + (y - 9)^2 &= 6^2 \\ \iff (x - 13)^2 + (y - 9)^2 &= 36 \end{aligned}$$

On considère un point $M(x; y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle \mathcal{C} si et seulement si l'équation $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. Justifier que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases}$$

Le point M est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si $y = 2x - 5$ et $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$. Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons remplacer le y de l'équation du cercle par $2x - 5$, donc :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 5 - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

3. En déduire que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

Dans le système d'équation précédent, développons la seconde équation.

$$\begin{aligned} &(x - 13)^2 + (2x - 14)^2 = 36 \\ \iff &x^2 - 2 \times x \times 13 + 13^2 + (2x)^2 - 2 \times 2x \times 14 + 14^2 = 36 \\ \iff &x^2 - 26x + 169 + 4x^2 - 56x + 196 - 36 = 0 \\ \iff &5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{aligned}$$

Donc le point M est sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Résolvons cette seconde équation : c'est un trinôme du second degré avec $a = 5$, $b = -82$, $c = 329$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-82)^2 - 4 \times 5 \times 329 = 144$. Le discriminant est strictement positif, donc il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-82) - \sqrt{144}}{2 \times 5} = 7 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-82) + \sqrt{144}}{2 \times 5} = 9,4 \end{aligned}$$

Nous avons deux valeurs possibles pour x . Utilisons l'équation de la droite pour trouver les valeurs correspondantes pour y .

(a) Si $x = 7$, alors $y = 2 \times 7 - 5 = 9$.

(b) Si $x = 9,4$, alors $y = 2 \times 9,4 - 5 = 13,8$.

Le cercle et la droite ont donc deux points d'intersection, de coordonnées $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9,4 \\ 13,8 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Lieu géométrique). Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le nombre réel α ;
- le cercle \mathcal{C} de centre $A(13;9)$ et de rayon 6 ;
- la droite \mathcal{D} d'équation $y = \alpha x - 4\alpha + 3$.

La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre α . On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de \mathcal{C} et \mathcal{D} en fonction de ce paramètre α .

1. Soit $M(x;y)$ un point de \mathcal{C} . Déterminer la longueur AM , puis justifier que $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

Voir la correction de la question 1 de l'exercice 3.

On considère un point $M(x;y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle \mathcal{C} si et seulement si l'équation $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. Justifier que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

Le point M est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si $y = \alpha x - 4\alpha + 3$ et $(x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36$. Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons remplacer le y de l'équation du cercle par $\alpha x - 4\alpha + 3$, donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (y - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha + 3 - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

3. En déduire que M est à la fois sur \mathcal{C} et \mathcal{D} si et seulement si :

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (\alpha^2 + 1)x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Développons la seconde équation du système précédent. Commençons par développer le second carré, avec la triple distributivité :

$$\begin{aligned} & (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 \\ &= (\alpha x - 4\alpha - 6) \times (\alpha x - 4\alpha - 6) \\ &= \alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 x - 6\alpha x - 4\alpha^2 x + 16\alpha^2 + 24\alpha - 6\alpha x + 24\alpha + 36 \\ &= \alpha^2 x^2 + (-4\alpha^2 - 6\alpha - 4\alpha^2 - 6\alpha)x + 16\alpha^2 + 24\alpha + 24\alpha + 36 \\ &= \alpha^2 x^2 + (-8\alpha^2 - 12\alpha)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant développer la seconde équation du système de la question précédente.

$$\begin{aligned} & (x - 13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \\ & x^2 - 26x + 13^2 + \alpha^2 x^2 + (-8\alpha^2 - 12\alpha)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 = 36 \\ & (\alpha^2 + 1)x^2 + (-8\alpha^2 - 12\alpha - 26)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 + 169 - 36 = 0 \\ & (\alpha^2 + 1)x^2 - (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{aligned}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de x (abscisse des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D}), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} .

On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta = (8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 \times (\alpha^2 + 1) (16\alpha^2 + 48\alpha + 169)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas¹.

developper((8α ² + 12α + 26) ² - 4 * (α ² + 1) * (16α ² + 48α + 169))
-180 * α ² + 432 * α

4. Dresser, en fonction de α , le tableau de signes de l'expression $-180\alpha^2 + 432\alpha$. Cette expression est un trinôme du second degré, avec $a = -180$, $b = 432$, $c = 0$. Son discriminant est $\Delta' = b^2 - 4ac = 432^2 - 4 \times (-180) \times 0 = 432^2$. Le discriminant est positif, donc il y a deux racines :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-432 - \sqrt{432^2}}{2 \times (-180)} = 2, 4 \\ \alpha_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-432 + \sqrt{432^2}}{2 \times (-180)} = 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant tracer le tableau de signes.

α	$-\infty$	0	$2, 4$	$+\infty$		
Δ		-	0	+	0	-

5. En déduire, en fonction de α , le nombre de solutions du système de la question 3, puis le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Le nombre de solutions du système de la question 3 est le même que le nombre de points d'intersections entre le cercle \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} . Donc :

- si $\alpha \in]-\infty; 0[\cup]2, 4; +\infty[$, alors Δ est strictement négatif, le système n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun point d'intersection ;
- si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2, 4$, alors Δ est nul, le système a une seule solution, et la droite et le cercle ont un unique point d'intersection (la droite est alors tangente au cercle) ;

¹C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur GNU/Linux, Windows et MacOS : <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>.

-
- si $\alpha \in]0; 2, 4[$, alors Δ est strictement positif, le système a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection (la droite « traverse » le cercle).