Exercice 2. On admet que $\sin \frac{7\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et on souhaite calculer la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{10}$.

1. *Montrer que* $\cos^2\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ *(vous pouvez utiliser la calculatrice* uniquement *pour simplifier l'expression obtenue).*
   On sait que pour tout nombre t, on a : $\sin^2 t + \cos^2 = 1$. Donc en appliquant cette propriété à $t = \frac{7\pi}{10}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin^2 \frac{7\pi}{10} + \cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 \\
\cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 - \sin^2 \frac{7\pi}{10} \\
\cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

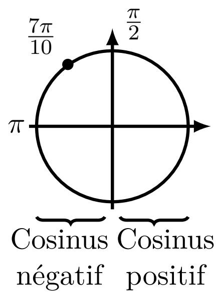
   Remarque : À partir de cette étape, vous pouvez faire la simplification à la calculatrice. Si nous voulons le faire à la main, cela donne le calcul suivant.

$$\begin{aligned}
\cos^2 \frac{7\pi}{10} &= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4^2} \\
&= 1 - \frac{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{16} \\
&= \frac{16}{16} - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} \\
&= \frac{16}{16} - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{16 - 6 - 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{\cancel{2} \times \left(5 - \sqrt{5}\right)}{\cancel{2} \times 8} \\
&= \frac{5 - \sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

2. *En plaçant $\frac{7\pi}{10}$ sur le cercle trigonométrique, justifier que :*

$$\cos\frac{7\pi}{10} < 0$$

Puisque : $5 < 7 < 10$, alors : $\frac{5\pi}{10} < \frac{7\pi}{10} < \frac{10\pi}{10}$, et donc : $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{10} < \pi$. Donc le point du cercle correspondant à l'angle $\frac{7\pi}{10}$ est sur le quart supérieur gauche du cercle trigonométrique, et son cosinus est négatif.



3. *En déduire la valeur exacte de* $\cos\frac{7\pi}{10}$ *(ne pas simplifier l'expression).*
Nous avons montré à la première question que $\cos^2\frac{7\pi}{10} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. Donc $\cos\frac{7\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\cos\frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Or, d'après la question précédente : $\cos\frac{7\pi}{10} < 0$. Donc seule la valeur négative convient, et :

$$\cos\frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 3 (Lieu géométrique)**.** *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :*

— *le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13;9)$ et de rayon 6 ;*
— *la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 5$.*

On cherche à déterminer les coordonnées des intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

1. *Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}$. Déterminer la longueur AM, puis justifier que $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$.*
Puisque M est un point du cercle de centre A, alors $[AM]$ est un rayon, donc

$AM = 6$.

$$\begin{aligned} AM &= 6 \\ \iff \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} &= 6 \\ \iff \sqrt{(x-13)^2 + (y-9)^2} &= 6 \\ \iff (x-13)^2 + (y-9)^2 &= 6^2 \\ \iff (x-13)^2 + (y-9)^2 &= 36 \end{aligned}$$

On considère un point $M(x;y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. *Justifier que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (2x-14)^2 = 36 \end{cases}$$

Le point M est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si $y = 2x - 5$ et $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$. Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons remplacer le y de l'équation du cercle par $2x - 5$, donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (y-9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (2x-5-9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x-13)^2 + (2x-14)^2 = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

3. *En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

Dans le système d'équation précédent, développons la seconde équation.

$$\begin{aligned} (x-13)^2 + (2x-14)^2 &= 36 \\ \iff x^2 - 2 \times x \times 13 + 13^2 + (2x)^2 - 2 \times 2x \times 14 + 14^2 &= 36 \\ \iff x^2 - 26x + 169 + 4x^2 - 56x + 196 - 36 &= 0 \\ \iff 5x^2 - 82x + 329 &= 0 \end{aligned}$$

Donc le point M est sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x^2 - 82x + 329 = 0 \end{cases}$$

4. *Résoudre la seconde équation, et en déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.*
   Résolvons cette seconde équation : c'est un trinôme du second degré avec $a = 5$, $b = -82$, $c = 329$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-82)^2 - 4 \times 5 \times 329 = 144$. Le discriminant est strictement positif, donc il y a deux solutions :
   $$\begin{array}{llll} x_1 & = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & = \frac{-(-82)-\sqrt{144}}{2\times 5} & = 7 \\ x_2 & = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & = \frac{-(-82)+\sqrt{144}}{2\times 5} & = 9,4 \end{array}$$
   Nous avons deux valeurs possibles pour x. Utilisons l'équation de la droite pour trouver les valeurs correspondantes pour y.
   (a) Si $x = 7$, alors $y = 2 \times 7 - 5 = 9$.
   (b) Si $y = 9,4$, alors $y = 2 \times 9,4 - 5 = 13,8$.

   Le cercle et la droite ont donc deux points d'intersection, de coordonnées $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9,4 \\ 13,8 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Lieu géométrique)**.** *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère :*

- *le nombre réel α ;*
- *le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(13; 9)$ et de rayon 6 ;*
- *la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \alpha x - 4\alpha + 3$.*

La droite n'est donc pas « fixe » : elle dépend d'un paramètre α. On cherche à déterminer le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction de ce paramètre α.

1. *Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}$. Déterminer la longueur AM, puis justifier que $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$.*
   Voir la correction de la question 1 de l'execice 3.

On considère un point $M(x; y)$ du plan. On admet que ce point est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$ est vérifiée.

2. *Justifier que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x-13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases}$$

Le point M est à la fois sur la droite et le cercle si les deux équations sont vérifiées, c'est-à-dire si $y = \alpha x - 4\alpha + 3$ et $(x-13)^2 + (y-9)^2 = 36$. Puisque l'équation de la droite est respectée, nous pouvons remplacer le y de l'équation du cercle par $\alpha x - 4\alpha + 3$, donc :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x-13)^2 + (y-9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x-13)^2 + (\alpha x - 4\alpha + 3 - 9)^2 = 36 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ (x-13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 = 36 \end{cases} \end{aligned}$$

3. *En déduire que M est à la fois sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\begin{cases} y = \alpha x - 4\alpha + 3 \\ \left(\alpha^2 + 1\right) x^2 - \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 = 0 \end{cases}$$

Développons la seconde équation du système précédent. Commençons par développer le second carré, avec la triple distributivité :

$$\begin{aligned} & (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 \\ & = (\alpha x - 4\alpha - 6) \times (\alpha x - 4\alpha - 6) \\ & = \alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 x - 6\alpha x - 4\alpha^2 x + 16\alpha^2 + 24\alpha - 6\alpha x + 24\alpha + 36 \\ & = \alpha^2 x^2 + \left(-4\alpha^2 - 6\alpha - 4\alpha^2 - 6\alpha\right) x + 16\alpha^2 + 24\alpha + 24\alpha + 36 \\ & = \alpha^2 x^2 + \left(-8\alpha^2 - 12\alpha\right) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant développer la seconde équation du système de la question précédente.

$$\begin{aligned} (x-13)^2 + (\alpha x - 4\alpha - 6)^2 &= 36 \\ x^2 - 26x + 13^2 + \alpha^2 x^2 + \left(-8\alpha^2 - 12\alpha\right) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 &= 36 \\ \left(\alpha^2 + 1\right) x^2 + \left(-8\alpha^2 - 12\alpha - 26\right) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 36 + 169 - 36 &= 0 \\ \left(\alpha^2 + 1\right) x^2 - \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right) x + 16\alpha^2 + 48\alpha + 169 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque les solutions de la seconde équation correspondent aux valeurs possible de x (abscisse des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$), et que pour chaque abscisse il n'y a qu'une ordonnée correspondante (d'après la première équation), alors le nombre de solutions de la seconde équation correspond au nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
On calcule le discriminant de l'expression précédente, soit :

$$\Delta = \left(8\alpha^2 + 12\alpha + 26\right)^2 - 4 \times \left(\alpha^2 + 1\right)\left(16\alpha^2 + 48\alpha + 169\right)$$

Pour éviter les erreurs de calculs, on fait développer cette expression par le logiciel de calcul formel Xcas[1].

`developper`$((8\alpha^2 + 12\alpha + 26)^2 - 4 * (\alpha^2 + 1) * (16\alpha^2 + 48\alpha + 169))$
$-180 * \alpha^2 + 432 * \alpha$

4. *Dresser, en fonction de α, le tableau de signes de l'expression $-180\alpha^2 + 432\alpha$.*
Cette expression est un trinôme du second degré, avec $a = -180$, $b = 432$, $c = 0$. Son discriminant est $\Delta' = b^2 - 4ac = 432^2 - 4 \times (-180) \times 0 = 432^2$. Le discriminant est positif, donc il y a deux racines :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{-b-\sqrt{\Delta'}}{2a} &= \tfrac{-432-\sqrt{432^2}}{2\times(-180)} &= 2,4 \\ \alpha_2 &= \tfrac{-b+\sqrt{\Delta'}}{2a} &= \tfrac{-432+\sqrt{432^2}}{2\times(-180)} &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant tracer le tableau de signes.

α	$-\infty$		0		$2,4$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. *En déduire, en fonction de α, le nombre de solutions du système de la question 3, puis le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.*
Le nombre de solutions du système de la question 3 est le même que le nombre de points d'intersections entre le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$. Donc :
   — si $\alpha \in]-\infty; 0[\cup]2,4; +\infty[$, alors Δ est strictement négatif, le système n'a pas de solutions, et la droite et le cercle n'ont aucun point d'intersection ;
   — si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2,4$, alors Δ est nul, le système a une seule solution, et la droite et le cercle ont un unique point d'intersection (la droite est alors tangente au cercle) ;

[1] C'est un logiciel libre et gratuit, que vous pouvez télécharger et installer gratuitement et légalement sur Gnu/Linux, Windows et MacOS : `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`.

— si $\alpha \in]0; 2,4[$, alors Δ est strictement positif, le système a deux solutions, et la droite et le cercle ont deux points d'intersection (la droite « traverse » le cercle).