

Exercice 1 (8 points — Inspiré du sujet d'EC n° 21). Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(5; 10)$ et $C(3; 5)$. Le but de l'exercice est de calculer l'aire du triangle ABC .

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 10 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 + 8 \times 3 = 48$$

2. (a) Soit D le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C . Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Puisque D est le pied de la hauteur issue de C , alors D est le projeté orthogonal de C sur (AB) , donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (b) En déduire que $AD = 4,8$.

D'une part, nous avons montré que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 48$.

D'autre part : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. Or :

$$AB = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (10 - 2)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

Donc, puisque \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires et dans le même sens, alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD = 10AD$$

Donc :

$$10AD = 48$$

$$AD = \frac{48}{10}$$

$$AD = 4,8$$

3. Montrer que $CD = 1,4$.

Commençons par calculer AC :

$$AC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = 5$$

Le triangle ACD est rectangle en D (puisque $[CD]$ est une hauteur), donc nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = CD^2 + AD^2$$

$$5^2 = CD^2 + 4,8^2$$

$$CD^2 = 5^2 - 4,8^2$$

$$CD^2 = 1,96$$

$$CD = \sqrt{1,96}$$

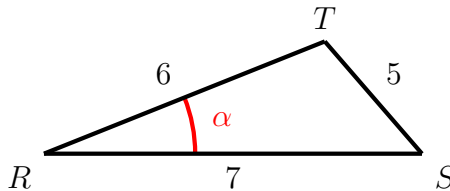
$$CD = 1,4$$

4. En déduire l'aire du triangle ABC .

L'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur :

$$A = \frac{CD \times AB}{2} = \frac{1,4 \times 10}{2} = 7$$

Exercice 2 (3 points). La figure n'est pas à l'échelle. Déterminer une mesure de l'angle α , arrondie au dixième de degrés près.



Appliquons le théorème d'Al Kashi :

$$TS^2 = TR^2 + RS^2 - 2 \times TR \times RS \times \cos \alpha$$

$$5^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos \alpha$$

$$25 = 85 - 84 \cos \alpha$$

$$-60 = -84 \cos \alpha$$

$$\frac{60}{84} = \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos \frac{60}{84}$$

$$\alpha \approx 44,4^\circ$$

Exercice 3 (4 points). Soient $A(1; 2)$ et $B(-2; 3)$ deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé. On souhaite placer un troisième point sur la diagonale d'équation $y = x$, de telle sorte que le triangle ABC soit rectangle en A .

On admet que les coordonnées de C sont $(x; x)$, pour une certaine valeur de x à déterminer.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2x + 1$.

On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ x - 2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -3(x - 1) + 1(x - 2) \\ &= -3x + 3 + x - 2 \\ &= -2x + 1 \end{aligned}$$

2. En déduire coordonnées possibles pour C telles que le triangle ABC soit rectangle en A .

Le triangle ABC est rectangle si et seulement si le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est nul :

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 0 \\ -2x + 1 &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x &= 0,5\end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une unique solution : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si les coordonnées de C sont $C(0, 5; 0, 5)$.