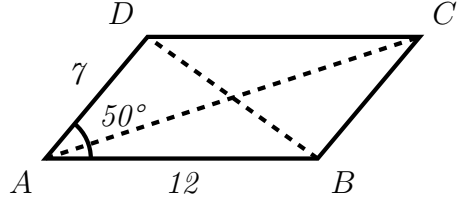


Exercice 1. On considère un parallélogramme $ABCD$, tel que $AB = 12$, $AD = 7$, et $\widehat{BAD} = 50^\circ$ (la figure de droite n'est pas à l'échelle). Le but de l'exercice est de déterminer la longueur AC .



1. En utilisant une expression appropriée du produit scalaire, calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
On utilise l'expression avec le cosinus.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= AB \times AD \times \cos \widehat{BAD} \\ &= 12 \times 7 \times \cos 50^\circ \\ &= 84 \cos 50^\circ\end{aligned}$$

On admet la propriété suivante : Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

2. En utilisant l'expression du produit scalaire introduite dans cet exercice, montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$.

Commençons par remarquer que puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - AB^2 - AD^2) \\ &= \frac{1}{2} (AC^2 - 12^2 - 7^2) \\ &= \frac{1}{2} (AC^2 - 193) \\ &= \frac{AC^2}{2} - \frac{193}{2} \\ &= \frac{AC^2}{2} - 96,5\end{aligned}$$

3. En déduire la longueur AC , arrondie au dixième.

Nous avons montré, d'une part, que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 84 \cos 50^\circ$, et, d'autre part, que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{AC^2}{2} - 96,5$. Donc :

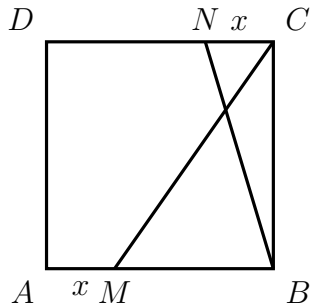
$$\begin{aligned} \frac{AC^2}{2} - 96,5 &= 84 \cos 50^\circ \\ \frac{AC^2}{2} &= 84 \cos 50^\circ + 96,5 \\ AC^2 &= 168 \cos 50^\circ + 193 \\ AC &= \sqrt{168 \cos 50^\circ + 193} \end{aligned}$$

Nous avons exclu la solution négative $AC = -\sqrt{\dots}$ car AC est une longueur, donc positive. Ainsi :

$$AC \approx 17,3$$

Exercice 2. On considère le carré $ABCD$ de côté 1, et x un nombre compris entre 0 et 1. On place le point M sur le segment $[AB]$, tel que $AM = x$, et N sur le segment $[CD]$, tel que $CN = x$. La situation est illustrée sur la figure suivante.

On se pose la question : Pour quelles valeurs de x les droites (BN) et (CM) sont-elles perpendiculaires ?



On se place dans le repère $(A; B; D)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées de B , C , N , M .

$$\text{On a : } B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; N \begin{pmatrix} 1-x \\ 1 \end{pmatrix}; M \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $\overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} x_N - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - x - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Montrer que les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si $-x^2 + x - 1 = 0$.

Les droites (BN) et (CM) sont perpendiculaires si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ est nul, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned}x \overrightarrow{BN} \times x \overrightarrow{CM} + y \overrightarrow{BN} \times y \overrightarrow{CM} &= 0 \\ -x \times (x - 1) + 1 \times (-1) &= 0 \\ -x^2 + x - 1 &= 0\end{aligned}$$

4. En déduire les solutions au problème posé. Le polynôme $-x^2 + x - 1$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3$. Ce discriminant est nul, donc le polynôme n'a pas de racines. Donc il n'existe pas de valeurs de x pour lesquelles le produit scalaire est nul, donc les droites (BN) et (CM) ne sont jamais parallèles, quelle que soit la valeur de x .

Exercice 3. Voir les exercices 2 et 3 de la feuille d'exercices (application du théorème d'Al Kashi). Exercices corrigés en classe.