Exercice 1 (8 points — D'après le sujet d'EC nº 15). *Une entreprise produit du tissu. Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction*

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.
On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. *Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?*
   La fabrication de 3 km de tissu a coûté $C(3) = 15 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 2 + 750 = 1575$ euros, et a rapporté $680 \times 3 = 2040$ euros, soit un résultat de $2040 - 1575 = 465$ euros.
2. *Montrer que : $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.*
   Pour une longueur de tissu x, la recette est $680x$, et le coût est $C(x)$. Donc le résultat est :
   $$\begin{aligned} R(x) &= 680x - C(x) \\ &= 680x - \left(15x^3 - 120x^2 + 500x + 750\right) \\ &= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 \\ &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750 \end{aligned}$$
3. *Donner une expression de $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B.*
   On a $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$, donc :
   $$\begin{aligned} B'(x) &= -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 \\ &= -45x^2 + 240x + 180 \end{aligned}$$
4. *Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0; 10]$ puis le tableau de variations de la fonction B.*
   La fonction B' est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000$. Il a donc deux racines :
   $$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{-240-\sqrt{90000}}{2\times(-45)} = \tfrac{-240-300}{-90} = \tfrac{-540}{-90} = 6 \\ x_2 &= \tfrac{-240+\sqrt{90000}}{2\times(-45)} = \tfrac{-240+300}{-90} = \tfrac{60}{-90} = -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$
   Traçons le tableau de signes de B', et le tableau de variations de B sur $]-\infty; +\infty[$ (même si le domaine de définition de B est seulement $[0; 10]$).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
B'		$-$	0	$+$	0	$-$	
B		$\searrow$	$\frac{-7310}{9}$	$\nearrow$	1410	$\searrow$	

Avec : $B(6) = -15 \times 6^3 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 750 = 1410$, et de même : $B\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{7310}{9}$.

5. *Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?*

   Le maximum de B sur l'intervalle $[0; 10]$ est $1\,410$, atteint pour $x = 6$, donc l'entreprise doit produire $6\,\text{km}$ de tissu pour que son résultat soit maximal.

Exercice 2 (7 points)**.** *Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :*

$$\frac{x^2+3}{x+1} \geqslant 2$$

On définit sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *(tous les nombres réels sauf* -1*) la fonction* f *par :*

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

1. *Montrer que pour tout* x *de son domaine de définition, on a :*

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

   La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2+3 & v(x) = x+1 \\ u'(x) = 2x & v'(x) = 1 \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x \times (x+1) - 1 \times (x^2+3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2. *Montrer que le tableau de signes de f' est :*

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Étudions séparément le numérateur et le dénomimateur de f.

— Le numérateur x^2+2x-3 est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$, et de racines $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2+4}{2} = 1$.

— Le dénominateur $(x+1)^2$ est un carré, donc toujours strictement positif (sauf en -1, exclu du domaine de définition).

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

Avec $f(-3) = \frac{(-3)^2+3}{-3+1} = \frac{12}{-2} = -6$ et $f(1) = \frac{1^2+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

3. *En déduire le tableau de variations de f.* Voir la question précédente.
4. *En déduire les solutions de l'inéquation de départ.*

   Sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$, le maximum de f est -6, donc l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ n'a aucune solution.

   Sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$, le minimum de f est 2, donc toutes les valeurs de cet intervalle sont solutions.

   Les solutions de l'inéquation sont donc $]-1 ; +\infty[$.